INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Álgebra Exterior

Coleção Matemática Universitária

Elon Lages Lima

Álgebra Exterior

COLEÇÃO MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

Álgebra Exterior

Elon Lages Lima

impa

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Sérgio R. Vaz e Noni Geiger

Títulos Publicados:

- Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável – Elon Lages Lima
- EDP. Um Curso de Graduação – Valéria Iório
- Curso de Álgebra, Volume 1 – Abramo Hefez
- Álgebra Linear – Elon Lages Lima
- Introdução às Curvas Algébricas Planas – Israel Vainsencher
- Equações Diferenciais Aplicadas – Djairo G. de Figueiredo e Aloisio Freiria Neves
- Geometria Diferencial – Paulo Ventura Araújo
- Introdução à Teoria dos Números – José Plínio de Oliveira Santos
- Cálculo em uma Variável Complexa – Marcio G. Soares
- Geometria Analítica e Álgebra Linear – Elon Lages Lima
- Números Primos: Mistérios e Recordes – Paulo Ribenboim
- Análise no Espaço R^n – Elon Lages Lima
- Análise Real, vol. 2: Funções de n Variáveis – Elon Lages Lima
- Álgebra Exterior – Elon Lages Lima
- Equações Diferenciais Ordinárias – Claus Ivo Doering e Artur Oscar Lopes
- Análise Real, vol. 3: Análise Vetorial – Elon Lages Lima
- Álgebra Linear. Exercícios e Soluções – Ralph Costa Teixeira
- Números Primos. Velhos Mistérios e Novos Recordes – Paulo Ribenboim

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

Prefácio

A Álgebra Exterior possui numerosas e importantes aplicações à Geometria Diferencial, à Topologia Algébrica, à Mecânica e às Equações Diferenciais Parciais. Isto torna seu conhecimento bastante útil aos estudantes de Matemática.

A presente introdução, restrita aos espaços vetoriais de dimensão finita sobre os reais, visa apresentar os conceitos e resultados básicos da teoria de maneira objetiva e simples, independentemente de tensores e sem os obstáculos que derivam da inexistência de base ou das peculiaridades do anel de escalares de um módulo. Para a grande maioria das aplicações, o caso que tratamos é suficiente. Quanto aos leitores que necessitem, no futuro, de uma teoria mais geral, acreditamos que a base aqui fornecida os orientará no sentido de discernir entre as dificuldades reais e os acidentes resultantes da generalidade. Tal discernimento é um ponto crucial na formação de todo matemático.

Ao finalizar o estudo destas notas, o leitor poderá chegar à conclusão de que a Álgebra Exterior nada mais é do que a teoria dos determinantes e seus parentes mais próximos. Ele estará perto da verdade: trata-se aqui do estudo das propriedades que fazem funcionar os determinantes e da exploração inteligente dessas idéias num contexto algébrico-geométrico.

Rio de Janeiro, maio de 1973.

Elon Lages Lima

Prefácio da segunda edição

A primeira edição deste livro foi publicada em 1973, sob forma de notas mimeografadas, para servir de texto de um curso lecionado no 9º Colóquio Brasileiro de Matemática. Na presente edição, foram modificadas as demonstrações da Proposição 1 do Capítulo 1 e da Proposição 2 do Capítulo 2. Além disso, foram feitas várias correções, principalmente de erros tipográficos.

Ao fazer imprimir novamente este livro, nossa intenção é divulgar um pouco mais amplamente o fato de que, além dos vetores unidimensionais usualmente estudados na Álgebra Linear, existem também vetores p-dimensionais, para todo $p \in \mathbb{N}$, conforme foi concebido originalmente por H. Grassmann. Isto permite estender o produto vetorial, comumente considerado apenas para dois vetores em $\mathbb{R}^3$, de modo a tê-lo entre p vetores quaisquer em $\mathbb{R}^n$. Tal extensão conduz naturalmente à importante e fértil dualidade entre p-vetores e $(n-p)$-formas ou, entre p-vetores e $(n-p)$-vetores quando se tem um produto interno.

Essas interessantíssimas idéias, provindas do gênio criativo de Grassmann, são de grande utilidade em vários ramos da Matemática e de suas aplicações. Por isso cremos que elas devem ser divulgadas, com uma exposição elementar e elucidativa como cremos ser a que apresentamos aqui.

Esperamos que este pequeno livro possa contribuir para preencher uma lacuna que existe na formação básica de nossos estudantes de Matemática.

Rio de Janeiro, abril de 2005.

Elon Lages Lima

Terminologia e Notações

A expressão *espaço vetorial* significará sempre *espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos reais*.

Usaremos *aplicação linear* e *transformação linear* como sinônimos. A imagem de um vetor $v \in E$ por uma transformação linear $T\colon E \to F$ será denotada por $T \cdot v$ ou Tv ou $T(v)$.

Uma transformação linear $T\colon E \to E$, de um espaço vetorial em si mesmo, será chamada um *endomorfismo*. As vezes nos permitiremos o pleonasmo *endomorfismo linear*.

Chamaremos ora *forma linear*, ora *funcional linear* a uma transformação linear $f\colon E \to \mathbb{R}$, isto é, um elemento $f \in E^*$ do espaço dual E^*.

A *base canônica* do espaço $\mathbb{R}^m$ é formada pelos vetores $e_1=(1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_m = (0,\ldots,0,1)$.

Sejam $(e_i)_{i\in I}$ e $(w_j)_{j\in J}$ bases dos espaços vetoriais E e F respectivamente. A *matriz* de uma transformação linear $T\colon E \to F$ relativamente a essas bases é $\alpha = (\alpha^i_j)$, onde $i \in I$ e $j \in J$. Ela é definida pelas igualdades $T \cdot e_j = \sum\limits_{i\in I} \alpha^i_j w_i$, para todo $j \in J$. Freqüentemente tem-se $I = \{1,2,\ldots,m\}$ e $J = \{1,2,\ldots,n\}$. Neste caso, α se diz uma *matriz* $n\times m$. Encontraremos no texto algumas matrizes $\alpha = (\alpha^K_L)$ cujos índices assumem valores não-numéricos.

Conteúdo

1

Permutações e Seqüências

Seja X um conjunto. A *composta* de duas aplicações $f, g\colon X \to X$ é a aplicação $f \circ g\colon X \to X$, definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in X.$$

A composição é uma operação associativa no conjunto $\mathcal{F}(X)$ das aplicações de X em si próprio. A aplicação identidade $\mathrm{id}\colon X \to X$ é o elemento neutro dessa operação.

Uma *permutação* de X é uma bijeção $\sigma\colon X \to X$, ou seja, uma aplicação $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ tal que, para cada $y \in X$ existe um único $x \in X$ com $\sigma(x) = y$. Cada permutação $\sigma\colon X \to X$ admite portanto uma *inversa* $\sigma^{-1}\colon X \to X$, definida pela condição

$$\sigma^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sigma(x) = y.$$

Tem-se $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$.

Segue-se que o conjunto das permutações de X, munido da operação de composição, constitui um grupo, chamado o *grupo das permutações* de X, ou o *grupo simétrico* de X, que indicaremos por $S(X)$.

Quando X é finito e possui m elementos, o grupo das permutações de X tem $m! = m(m-1)\dots 2 \cdot 1$ elementos.

Usaremos a notação

$$I_m = \{1, 2, \dots, m\}$$

para indicar o conjunto dos inteiros positivos de 1 até m. O grupo das permutações do conjunto I_m será representado pelo símbolo S_m. Ele é chamado o grupo simétrico de m objetos ou o grupo simétrico de grau m.

Seja $m \geq 2$. Uma permutação $\tau \in S_m$ chama-se uma *transposição* quando existem inteiros $a \neq b$ em I_m tais que $\tau(a) = b$, $\tau(b) = a$ e $\tau(i) = i$ para $i \notin \{a, b\}$. Quando τ é uma transposição, tem-se $\tau^2 = \text{id}$, isto é, $\tau^{-1} = \tau$.

Proposição 1. *Toda permutação $\sigma \in S_m$ pode ser escrita como produto $\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k$ de transposições. Esta expressão não é única, mas a paridade do número k é: se σ puder ser escrita como produto de um número par (respect. ímpar) de transposições, qualquer outra decomposição de σ como produto de transposições conterá um número par (respect. ímpar) de fatores.*

Demonstração: Provaremos por indução em m que toda permutação $\sigma \in S_m$ $(m \geq 2)$ é um produto de transposições. Isto é óbvio para $m = 2$. Suponhamos, portanto, que $m > 2$ e que o resultado foi demonstrado para S_{m-1}. Dada $\sigma \in S_m$, se por acaso for $\sigma(m) = m$ então $\sigma(I_{m-1}) \subset I_{m-1}$ e a restrição $\sigma' = \sigma | I_{m-1}$ de σ a I_{m-1} é uma permutação $\sigma' \in S_{m-1}$. Pela hipótese de indução, $\sigma' = \tau_1' \tau_2' \ldots \tau_k'$, é um produto de transposições $\tau_i' \in S_{m-1}$. Cada τ_i' se estende, de modo natural, a uma transposição $\tau_i \in S_m$, com $\tau_i(m) = m$. Então será $\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k$. Caso, porém, seja $\sigma(m) = n$, $n < m$, consideraremos a transposição $\tau \in S_m$ dada por $\tau(n) = m$. Teremos $\tau\sigma(m) = m$. Como acabamos de ver, isto implica $\tau\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k$, um produto de transposições. Segue-se que $\sigma = \tau \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k$ e a afirmação feita está demonstrada.

Provaremos agora a segunda parte da Proposição 1. Inicialmente, a cada polinômio $p = p(x^1, \ldots, x^m)$, em m variáveis, e a cada permutação $\sigma \in S_m$, associemos o novo polinômio σp tal que

$$(\sigma p)(x^1, \ldots, x^m) = p(x^{\sigma(1)}, \ldots, x^{\sigma(m)}).$$

É claro que para quaisquer $\rho, \sigma \in S_m$, vale $(\rho\sigma)p = \rho(\sigma p)$.

Em seguida, consideremos o polinômio especial $P = P(x^1, \ldots, x^m)$, definido por

$$P(x^1, \ldots, x^m) = \prod_{i<j} (x^i - x^j).$$

Então

$$(\sigma P)(x^1, \ldots, x^m) = \prod_{i<j} (x^{\sigma(i)} - x^{\sigma(j)}).$$

Como se vê facilmente, tem-se $\sigma P = \pm P$, seja qual for $\sigma \in S_m$. A cada permutação $\sigma \in S_m$ corresponde então o número $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ (chamado o sinal de σ), definido pela igualdade $\sigma P = \varepsilon_\sigma \cdot P$.

De $(\rho\sigma)P = \rho(\sigma P)$ resulta que $\varepsilon_{\rho\sigma} = \varepsilon_\rho \cdot \varepsilon_\sigma$.

Vamos mostrar que $\varepsilon_\tau = -1$ seja qual for a transposição τ.

Ora, toda transposição $\tau = (i, j)$ é o produto de um número ímpar de transposições do tipo $(k, k+1)$ pois, a fim de trocar as posições dos dois números $i < j$ na seqüência $1, 2, \ldots, m$, basta fazer i pular, um a um, os números desde $i+1$, até ficar logo após j (dando $j - i$ pulos) e depois j dar $j-i-1$ pulos para trás, a fim de ficar no lugar onde estava i anteriormente. Total: $2j-2i-1$ pulos, portanto $\tau = (i, j)$ é o produto do número ímpar $2j - 2i - 1$ transposições do tipo $(k, k+1)$.

Assim, basta mostrar que $\varepsilon_\tau = -1$ quando $\tau = (k, k+1)$.

Com efeito, temos

$$(\tau P)(x^1, \ldots, x^m) = \prod_{i<j} (x^{\tau(i)} - x^{\tau(j)}).$$

Se $i < k$ então $\tau(i) = i$ e $\tau(j) \geq k$ (pois $i < j$) portanto $\tau(i) < \tau(j)$. Analogamente, se $j > k+1$, vale ainda $\tau(i) < \tau(j)$.

Portanto $x^{k+1} - x^k = x^{\tau(k)} - x^{\tau(k+1)}$ é o único fator do produto τP cujo índice do primeiro termo, x^{k+1}, é superior ao índice do segundo termo, x^k. Logo $x^{\tau(k)} - x^{\tau(k+1)} = -[x^k - x^{k+1}]$ e daí

$$\tau P = \prod_{i<j} (x^{\tau(i)} - x^{\tau(j)}) = - \prod_{\tau(i)<\tau(j)} (x^{\tau(i)} - x^{\tau(j)}) = -P.$$

Concluindo: se $\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k$ então $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\tau_1} \cdot \varepsilon_{\tau_2} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{\tau_k} = (-1)^k$, portanto a paridade de k depende apenas de σ mas não da maneira de decompor esta permutação num produto de transposições. □

Diremos que uma permutação $\sigma \in S_m$ é *par* quando ela for o produto de um número par de transposições e *ímpar* no caso contrário. Usaremos o símbolo ε_σ para representar o *sinal*, ou a *paridade* da permutação σ: $\varepsilon_\sigma = 1$ se σ for uma permutação par e $\varepsilon_\sigma = -1$ se σ for ímpar.

Evidentemente, o produto de duas permutações pares é par, o produto de duas ímpares também é par, o produto de uma par por uma ímpar é ímpar e a inversa de σ tem a mesma paridade que σ. Estes fatos se traduzem pelas igualdades:

$$\varepsilon_{\sigma\rho} = \varepsilon_\sigma \cdot \varepsilon_\rho, \quad \varepsilon_{\sigma^{-1}} = \varepsilon_\sigma.$$

Uma *seqüência* de r elementos em I_m é uma aplicação $(s)\colon I_r \to I_m$. Indicaremos uma tal seqüência com a notação

$$(s) = (i_1, \ldots, i_r).$$

Assim sendo, $i_k \in I_m$ é o valor da aplicação (s) no ponto $k \in I_r$. Em particular, a igualdade

$$(i_1, \ldots, i_r) = (j_1, \ldots, j_r)$$

significa que $i_1 = j_1, \ldots, i_r = j_r$.

Existem m^r seqüências de r elementos em I_m.

Diremos que a seqüência $(i_1, \ldots, i_r)$ tem *repetições* quando existirem $a \neq b$ em I_r tais que $i_a = i_b$.

Deve-se distinguir cuidadosamente uma seqüência $(i_1, \ldots, i_r)$ do conjunto $\{i_1, \ldots, i_r\}$ que ela determina. Em termos precisos, o conjunto $\{i_1, \ldots, i_r\}$ é a imagem (ou conjunto dos valores) da aplicação $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$. Quando a seqüência $(i_1, \ldots, i_r)$ tem repetições, o conjunto $\{i_1, \ldots, i_r\}$, malgrado a notação, possui menos de r elementos. Além disso, mesmo quando a seqüência $(i_1, \ldots, i_r)$ não tem repetições, para qualquer permutação $\sigma \in S_r$ o conjunto $\{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}\}$ é o mesmo, enquanto que as seqüências $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)})$ são diferentes para diferentes valores de σ. (Se a primeira seqüência é (s), a segunda será $(s) \circ \sigma$.) Assim, por exemplo, $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ mas $(1, 3) \neq (3, 1)$.

Dado um subconjunto $I \subset I_m$, escreveremos

$$I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\}$$

para indicar que a numeração dos elementos do conjunto I foi escolhida de modo a preservar a ordem crescente dos números inteiros que o constituem.

Uma seqüência (s) com r elementos, sem repetições, em I_m é univocamente caracterizada por um subconjunto $I = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subset I_m$ e uma permutação $\sigma \in S_r$, de modo que

$$(s) = (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}).$$

Como o conjunto $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ possui

$$\binom{m}{r} = \frac{1}{r!}[m(m-1)\ldots(m-r+1)]$$

subconjuntos com r elementos, concluimos que existem precisamente

$$\binom{m}{r} \cdot r! = m(m-1)\ldots(m-r+1)$$

seqüências de r elementos, sem repetições, em I_m.

2

Aplicações Multilineares

Sejam $E_1, \dots, E_r$, F espaços vetoriais. Uma aplicação

$$f \colon E_1 \times \cdots \times E_r \to F$$

chama-se *r-linear* quando é linear separadamente em cada uma das suas variáveis. Isto significa que, dados arbitrariamente $v_1 \in E_1, \dots, v_i$, $w_i \in E_i, \dots, v_r \in E_r$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(v_1, \dots, v_i + w_i, \dots, v_r) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + f(v_1, \dots, w_i, \dots, v_r)$$

$$\text{e} \quad f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_r) = \lambda \cdot f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

Para $r = 1$, uma aplicação 1-linear é simplesmente uma aplicação linear $f \colon E_1 \to F$. Quando $r = 2$ e $r = 3$, uma aplicação r-linear chama-se, respectivamente, *bilinear* e *trilinear*.

Indicaremos com $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$ o conjunto das aplicações r-lineares $f \colon E_1 \times \cdots \times E_r \to F$. A soma de duas aplicações r-lineares e o produto e uma aplicação r-linear por um escalar são definidos, de modo natural, pelas igualdades:

$$(f + g)(v_1, \dots, v_r) = f(v_1, \dots, v_r) + g(v_1, \dots, v_r)$$

$$(\lambda f)(v_1, \dots, v_r) = \lambda \cdot f(v_1, \dots, v_r)$$

Verifica-se facilmente que se $f, g \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$ e $\lambda \in R$ então $f + g$, $\lambda f \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$. Estas duas operações dão ao conjunto $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$ uma estrutura de espaço vetorial. A principal finalidade deste capítulo é determinar uma base desse espaço vetorial a partir de bases dadas nos espaços E_i e em F.

Quando $E_1 = \cdots = E_r$, escreveremos $\mathcal{L}_r(E;F)$ para indicar o espaço vetorial das aplicações r-lineares $f\colon E \times \cdots \times E \to F$. Por abuso de linguagem, as chamaremos aplicações r-lineares de E em F.

Em particular, $\mathcal{L}_1(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$ é o espaço das aplicações lineares de E em F. Quando $r = 1$ e $E = F$, escreveremos $\mathcal{L}(E)$ em vez de $\mathcal{L}(E;E)$.

Quando $F = \mathbb{R}$ (corpo dos reais), as aplicações r-lineares $f\colon E_1 \times \cdots \times E_r \to \mathbb{R}$ chamam-se *formas r-lineares*. Em particular, o espaço $\mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = E^*$ das formas lineares em E chama-se o *espaço dual* de E.

Recordamos que se $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ é uma base ordenada em E, sua *base dual* $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^m)$ é constituida pelas formas lineares $e^i\colon E \to R$ caracterizadas pela propriedade seguinte: $e^i(e_i) = 1$ e $e^i(e_j) = 0$ se $i \neq j$.

Uma aplicação r-linear $f\colon E_1 \times \cdots \times E_r \to F$ pode ser pensada intuitivamente como uma maneira de "multiplicar" os "fatores" $v_1 \in E_1, \ldots, v_r \in E_r$, obtendo como "produto" o elemento $f(v_1, \ldots, v_r) \in F$. As igualdades que definem a r-linearidade de f exprimem a distributividade dessa multiplicação e a homogeneidade relativamente a escalares $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplos: Apresentamos, a seguir, uma lista de exemplos de aplicações multilineares. Em cada caso, a verificação da r-linearidade é uma tarefa simples, deixada a cargo do leitor.

1) A multiplicação de números reais $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ é bilinear. Mais geralmente, é r-linear a aplicação $g\colon \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x_1, \ldots, x_r) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_r$.

2) Dado um espaço vetorial E, a multiplicação de um escalar por um vetor, ou seja, a aplicação $f\colon \mathbb{R} \times E \to E$, $f(\lambda, v) = \lambda \cdot v$, é bilinear.

3) Sejam E, F, G espaços vetoriais. A composição de aplicações lineares fornece uma aplicação bilinear $f\colon \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(E;G)$, onde $f(B,A) = B \circ A$.

4) Sejam E, F espaços vetoriais. A "avaliação" de uma transformação linear $A\colon E \to F$ num vetor $v \in E$ fornece uma aplicação bilinear $f\colon \mathcal{L}(E;F) \times E \to F$, dada por $f(A,v) = A(v)$. No caso particular de $F = \mathbb{R}$ (corpo real) temos $f\colon E^* \times E \to \mathbb{R}$, dada por $f(\varphi, v) = \varphi(v)$.

5) *Produto tensorial de formas lineares.* Dados os espaços vetoriais E, F e as formas lineares $f \in E^*$, $g \in F^*$, definimos uma forma bili-

near $f \cdot g \colon E \times F \to \mathbb{R}$, chamada *produto tensorial* de f por g, pondo $(f \cdot g)(u, v) = f(u) \cdot g(v)$. Mais geralmente, dadas r formas lineares $f^1 \in E_1^*, \ldots, f^r \in E_r^*$, obtemos uma forma r-linear $f = f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r \colon E_1 \times \cdots \times E_r \to \mathbb{R}$ pondo $f(v_1, v_2, \ldots, v_r) = f^1(v_1) \cdot f^2(v_2) \cdot \ldots \cdot f^r(v_r)$. Isto nos fornece um modo de obter formas multilineares a partir de formas lineares. Deve-se observar que o produto tensorial não é comutativo: dadas $f, g \in E^*$, tem-se $f \cdot g \neq g \cdot f$ em geral.

6) Não somente cada produto $f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r$ é r-linear como também a própria aplicação $P \colon E_1^* \times E_2^* \times \cdots \times E_r^* \to \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; \mathbb{R})$, definida por $P(f^1, f^2, \ldots, f^r) = f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r$, é r-linear, como se verifica sem dificuldade.

7) Dados os vetores $x = (x^1, \ldots, x^m)$ e $y = (y^1, \ldots, y^m)$ em $\mathbb{R}^m$, seu *produto interno* é definido por $\langle x, y \rangle = \Sigma x^i y^i$. O produto interno é exemplo de uma forma bilinear $\varphi \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Considerando a base dual $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^m)$ da base canônica de $\mathbb{R}^m$, temos $\varphi = \Sigma e^i \cdot e^i$, onde $e^i \cdot e^i$ significa, como no Exemplo 5, o produto tensorial da forma e^i por si própria.

8) Ao contrário do que ocorre com transformações lineares, dada uma aplicação r-linear $f \colon E_1 \times \cdots \times E_r \to F$, sua imagem $f(E_1 \times \cdots \times E_r)$ pode não ser um subespaço vetorial de F. Como exemplo dessa situação, consideremos a aplicação bilinear

$$P \colon (\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^* \to \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

que associa, a cada par de funcionais lineares $f, g \in (\mathbb{R}^2)^*$ seu produto tensorial $P(f, g) = f \cdot g$. (Vide Exemplos 5 e 6.) Dada a base canônica (e^1, e^2) em $(\mathbb{R}^2)^*$, as formas $e^1 \cdot e^1$ e $e^2 \cdot e^2$ pertencem à imagem de P. Mostremos agora que sua soma $e^1 \cdot e^1 + e^2 \cdot e^2$ não pertence à imagem de P. Com efeito, se existissem formas lineares $f, g \in (\mathbb{R}^2)^*$ tais que $e^1 \cdot e^1 + e^2 \cdot e^2 = f \cdot g$ então seria $f(e_1) \cdot g(e_1) = f(e_2) \cdot g(e_2) = 1$ (logo $f(e_1) \neq 0$ e $g(e_2) \neq 0$) enquanto $f(e_1) \cdot g(e_2) = 0$, um absurdo.

Proposição 1. *Sejam $E_1, \ldots, E_r, F_1, \ldots, F_s, G$ espaços vetoriais. A aplicação*

$$T \colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r, F_1, \ldots, F_s; G) \to \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; \mathcal{L}(E_1, \ldots, F_s; G)),$$

definida por

$$[(Tf)(v_1, \ldots, v_r)](w_1, \ldots, w_s) = f(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s),$$

é um isomorfismo.

Demonstração: Basta observar que T é linear, e que a aplicação linear

$$S\colon \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_r;\mathcal{L}(F_1,\ldots,F_s;G)) \to \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_r,F_1,\ldots,F_s;G),$$

definida pondo-se, para cada $g\colon E_1\times\cdots\times E_r \to \mathcal{L}(F_1,\ldots,F_s;G)$ r-linear,

$$(Sg)(v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_s) = [g(v_1,\ldots,v_r)](w_1,\ldots,w_s),$$

é inversa de T. □

Corolário 1. *Dados os espaços vetoriais E, F, a aplicação*

$$T\colon \mathcal{L}_{r+s}(E;F) \to \mathcal{L}_r(E;\mathcal{L}_s(E;F)),$$

definida por

$$[(Tf)(v_1,\ldots,v_r)](w_1,\ldots,w_s) = f(v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_s),$$

é um isomorfismo.

Corolário 2. *Se* $\dim E_1 = m_1,\ldots,\dim E_r = m_r$ *e* $\dim F = n$, *então* $\dim \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_r;F) = m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_r\cdot n$.

Com efeito, sabendo que $\dim\mathcal{L}(E;F) = \dim E\cdot\dim F$, basta notar que $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_r;F) = \mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2,\ldots,E_r;F))$ e usar indução sobre r.

Como o isomorfismo T acima foi definido independentemente de escolhas arbitrárias, diremos que ele é um isomorfismo *canônico*.

A partir de agora, consideraremos apenas aplicações r-lineares $f\colon E\times\cdots\times E \to F$, cujas variáveis estão no mesmo espaço vetorial E. Este será o único caso que aparecerá nos capítulos seguintes. O leitor não terá dificuldade alguma em estender as proposições abaixo ao caso geral.

Proposição 2. Sejam E, F espaços vetoriais e $S\subset E$ um conjunto de geradores. Se duas aplicações r-lineares $f, g\colon E\times\cdots\times E\to F$ são tais que $f(v_1,\ldots,v_r) = g(v_1,\ldots,v_r)$ para quaisquer $v_1,\ldots,v_r\in S$, então $f = g$.

Demonstração: (Indução em r.) A proposição é óbvia quando $r = 1$. Supondo válida para r, sejam $f, g\in\mathcal{L}_{r+1}(E;F)$ tais que $f(v_1,\ldots,v_{r+1}) = g(v_1,\ldots,v_{r+1})$ quando $v_1,\ldots,v_{r+1}\in S$. Fixemos um vetor arbitrário $v\in E$ e definamos $f', g'\in\mathcal{L}_r(E;F)$ pondo $f'(v_1,\ldots,v_r) = f(v_1,\ldots,v_r,v)$

e $g'(v_1, \ldots, v_r) = g(v_1, \ldots, v_r, v)$. Então f' e g' coincidem quando as r variáveis estão em S logo, pela hipótese de indução, $f' = g'$. Isto quer dizer que $f(v_1, \ldots, v_r, v) = g(v_1, \ldots, v_r, v)$ quaisquer que sejam $v_1, \ldots, v_r, v \in E$, ou seja, $f = g$. □

Proposição 3. *Sejam $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma base ordenada de um espaço vetorial E e $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^m)$ sua base dual. Para cada seqüência $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$ de r inteiros em I_m, consideremos o produto tensorial $e^{(s)} = e^{i_1} \cdot e^{i_2} \cdot \ldots \cdot e^{i_r}$. As formas r-lineares $e^{(s)}$ constituem uma base do espaço vetorial $\mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$. As coordenadas de uma forma r-linear $f \colon E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$ relativamente a essa base são os números $\zeta_{(s)} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$, $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$.*

Demonstração: Segue-se da definição de produto tensorial de formas lineares que, para cada $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$ tem-se

$$e^{(s)}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = 1 \quad \text{e} \quad e^{(s)}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = 0$$

se $(s) \neq (j_1, \ldots, j_r)$.

Por conseguinte, dada arbitrariamente $f \in \mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$, pondo $\zeta_{(s)} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ para cada $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$ e considerando a forma r-linear $g = \sum_{(s)} \zeta_{(s)} e^{(s)}$ (soma estendida a todas as seqüências (s) de r inteiros em I_m), vemos que $g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \zeta_{(s)} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ quaisquer que sejam $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r} \in \mathcal{E}$. Segue-se da Proposição 2 que $f = g$. Isto prova que toda $f \in \mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$ é combinação linear das $e^{(s)}$. Como há m^r seqüências (s) e esta é a dimensão de $\mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$, concluimos que as formas r-lineares $e^{(s)}$ constituem uma base do espaço $\mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$. □

Proposição 4. *Sejam E, F espaços vetoriais. Dada uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E, façamos corresponder a cada seqüência $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$ de r elementos em I_m um vetor (arbitrariamente escolhido) $w_{(s)} \in F$. Existe uma única aplicação r-linear $f \colon E \times \cdots \times E \to F$ tal que $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = w_{(s)}$ para cada $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$.*

Demonstração: A unicidade de f decorre da Proposição 2. Para demonstrar a existência, definamos f por

$$f(v_1, \ldots, v_r) = \sum_{(s)} e^{(s)}(v_1, \ldots, v_r) w_{(s)},$$

a soma estendendo-se a todas as seqüências (s) de r inteiros em I_m. □

Proposição 5. *Sejam E, F espaços vetoriais. Dadas bases ordenadas $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E e $\mathcal{F} = (w_1, \ldots, w_n)$ em F, consideremos, para cada par $((s), k)$, onde (s) é uma seqüência de r inteiros em I_m e $1 \leq k \leq n$, a (única) aplicação r-linear $f_k^{(s)} \colon E \times \cdots \times E \to F$ tal que*

$$f_k^{(s)}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = w_k \qquad \textit{se } (s) = (i_1, \ldots, i_r)$$
$$f_k^{(s)}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = 0 \qquad \textit{se } (s) \neq (j_1, \ldots, j_r)$$

As aplicações r-lineares $f_k^{(s)}$ constituem uma base do espaço vetorial $\mathcal{L}_r(E; F)$. As coordenadas de uma aplicação r-linear arbitrária $f \colon E \times \cdots \times E \to F$ relativamente a esta base são os números $\zeta_{(s)}^k$, definidos por $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \sum_k \zeta_{(s)}^k w_k$.

Demonstração: Sabemos que $\dim \mathcal{L}_r(E; F) = m^r \cdot n$. Como existem precisamente $m^r \cdot n$ pares $((s), k)$, basta demonstrar que as aplicações r-lineares $f_k^{(s)}$ (cuja existência é assegurada pela Proposição 4) geram o espaço $\mathcal{L}_r(E; F)$. Ora, dada arbitrariamente $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$, para cada seqüência $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$ de r inteiros em I_m, o vetor $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) \in F$ se escreve como combinação linear dos elementos da base $\mathcal{F}$: $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \sum_k \zeta_{(s)}^k w_k$. Consideremos agora a aplicação r-linear $g = \sum_{(s),k} \zeta_{(s)}^k f_k^{(s)}$, a soma sendo estendida a todas as seqüências (s) e a todos os inteiros $k \in I_n$. É imediato que, para toda seqüência $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$, temos $g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ donde, pela Proposição 2, concluímos que $f = g$, isto é, que f é combinação linear das aplicações $f_k^{(s)}$. Isto conclui a demonstração. □

Exercícios

1. Prove que se $g \colon F \to G$ é linear e $f \colon E_1 \times \cdots \times E_r \to F$ é r-linear, então $g \circ f \colon E_1 \times \cdots \times E_r \to G$ é r-linear.

2. Sejam $f_1 \colon E_1 \to F_1, \ldots, f_r \colon E_r \to F_r$ lineares e $g \colon F_1 \times \cdots \times F_r \to G$ r-linear. Prove que $\varphi = g(f_1, \ldots, f_r) \colon E_1 \times \cdots \times E_r \to G$,

definida por $\varphi(v_1, \ldots, v_r) = g(f_1(v_1), \ldots, f_r(v_r))$, é r-linear. Prove também que, fixada g, a aplicação $\mathcal{L}(E_1, F_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r, F_r) \to \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; F)$, dada por $(f_1, \ldots, f_r) \mapsto g(f_1, \ldots, f_r)$, é r-linear. Qual dos exemplos do texto é um caso particular desta situação?

3. Seja $f \colon E^* \times E \to R$ a aplicação de avaliação. (Exemplo 4.) Considere o isomorfismo canônico $T \colon \mathcal{L}(E^*, E; \mathbb{R}) \to \mathcal{L}(E^*; E^*)$. Mostre que $T(f) = \text{id}$ e que, dada $g \in \mathcal{L}(E^*, E; \mathbb{R})$, tem-se $T(g)$ invertível se, e somente se, g cumpre a condição seguinte: $g(v^*, v) = 0$ para todo $v \in E \Rightarrow v^* = 0$.

4. Prove que se $\dim E = m$ então $\mathcal{L}_2(E; \mathbb{R})$ é isomorfo (de maneira não-canônica) ao espaço vetorial $M(m)$ das matrizes reais $m \times m$. Determine todos os elementos de $\mathcal{L}_r(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

5. Prove que $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; \prod_{j=1}^{s} F_j) \approx \prod_{j=1}^{s} \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; F_j)$.

6. Diz-se que $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ é uma aplicação r-linear *universal* quando $\dim F = (\dim E)^r$ e $f(E \times \cdots \times E)$ gera F. Prove as seguintes afirmações:

   (a) f é universal se, e somente se, existe uma base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E tal que as imagens $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$, onde $(i_1, \ldots, i_r)$ percorre todas as seqüências de r elementos em I_m, constituem uma base de F.

   (b) f é universal se, e somente se, a condição (a) se cumpre para *qualquer* base de E.

   (c) A aplicação $P \colon E^* \times \cdots \times E^* \to \mathcal{L}(E^*; \mathbb{R})$, do Exemplo 6, é universal.

   (d) A aplicação $f \colon E^* \times E \to \mathcal{L}(E)$, definida por $f(v^*, v) \cdot x = v^*(x) \cdot v$, é universal.

   (e) Se $f \colon E \times E \to F$ é universal então, para cada $g \colon E \times E \to G$ bilinear, existe uma única $\overline{g} \colon F \to G$ linear tal que $g = \overline{g} \circ f$.

   (f) Se $f_1 \colon E \times E \to F_1$ e $f_2 \colon E \times E \to F_2$ são universais, então existe um único isomorfismo $\varphi \colon F_1 \to F_2$ tal que $\varphi \circ f_1 = f_2$.

7. Uma aplicação bilinear $f \in \mathcal{L}_2(E; F)$ chama-se *simétrica* quando $f(u, v) = f(v, u)$ para quaisquer $u, v \in E$ e *anti-simétrica* quando

$f(u,v) = -f(v,u)$ quaisquer que sejam $u, v \in E$. Prove que as aplicações bilineares simétricas e anti-simétricas formam subespaços vetoriais de $\mathcal{L}_2(E;F)$, indicados respectivamente com as notações $\mathcal{S}_2(E;F)$ e $\mathfrak{A}_2(E;F)$. Prove que $\mathcal{L}_2(E;F) = \mathcal{S}_2(E;F) \oplus \mathfrak{A}_2(E;F)$. Mostre que $\dim \mathcal{S}_2(E;F) = \frac{m(m+1)}{2} \times n$ e $\dim \mathfrak{A}_2(E;F) = \frac{m(m-1)}{2} \times n$, onde $m = \dim E$ e $n = \dim F$.

8. Mostre que se $f, g\colon E \times E \to F$ são aplicação bilineares simétricas tais que $f(u,u) = g(u,u)$ para todo $u \in E$ então $f = g$.

9. Determine se a soma $s\colon E \times E \to E$, $s(u,v) = u + v$, e a avaliação $\alpha\colon \mathcal{L}_2(E;F) \times (E \times E) \to F$, $\alpha(f,u,v) = f(u,v)$, são aplicações lineares ou multilineares.

10. Seja $S = (v_i)_{i \in I}$ uma família de geradores de E. Para cada $(i,j) \in I \times I$, tomemos $w_{ij} \in F$. Prove que existe uma aplicação bilinear $f\colon E \times E \to F$ tal que $f(v_i, v_j) = w_{ij}$ para todo $(i,j) \in I \times I$ se, e somente se, toda relação $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$ implica $\sum_{i \in I} \lambda_i w_{ij} = 0$ e $\sum_{i \in I} \lambda_i w_{ji} = 0$ qualquer que seja $j \in I$.

11. Sejam $E_1, \ldots, E_r, F$ espaços vetoriais e, para cada $i = 1, \ldots, r$, seja $L_i \subset E_i$ uma família linearmente independente. Para cada seqüência $(s) = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ com $e_{i_1} \in L_1, \ldots, e_{i_r} \in L_r$, seja $w_{(s)}$ um vetor escolhido arbitrariamente em F. Existe uma aplicação r-linear (não necessariamente única) $f \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; F)$ tal que $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = w_{(s)}$ para todo (s).

12. Defina o produto tensorial de $f \in \mathcal{L}_r(E;\mathbb{R})$ por $g \in \mathcal{L}_s(E;\mathbb{R})$ como a forma $(r+s)$-linear $f \cdot g \in \mathcal{L}_{r+s}(E;\mathbb{R})$ dada por $(f \cdot g)(v_1, \ldots, v_{r+s}) = f(v_1, \ldots, v_r) \cdot g(r_{r+1}, \ldots, v_{r+s})$. Prove que $P\colon \mathcal{L}_r(E;\mathbb{R}) \times \mathcal{L}_s(E;\mathbb{R}) \to \mathcal{L}_{r+s}(E;\mathbb{R})$, definida por $P(f,g) = f \cdot g$, é bilinear e que, se $(\varphi^1, \ldots, \varphi^p)$, $(\psi^1, \ldots, \psi^q)$ são bases ordenadas em $\mathcal{L}_r(E;\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}_s(E;\mathbb{R})$ respectivamente, então os produtos tensoriais $\varphi^i \cdot \psi^j$ $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q)$ constituem uma base em $\mathcal{L}_{r+s}(E;\mathbb{R})$.

13. Indicando com (e_1, e_2) e base canônica de $\mathbb{R}^2$ e com (a_1, a_2, a_3, a_4) a base canônica de $\mathbb{R}^4$, seja $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação bilinear tal que $f(e_1, e_1) = a_1$, $f(e_1, e_2) = a_2$, $f(e_2, e_1) = a_3$ e $f(e_2, e_2) = a_4$.

Prove que um vetor $z = (z^1, z^2, z^3, z^4) \in \mathbb{R}^4$ é da forma $z = f(x, y)$ se, e somente se $z^1 z^4 = z^2 z^3$. Conclua que a imagem de f gera mas não coincide com $\mathbb{R}^4$. Em particular, $f(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ não é subespaço vetorial.

14. Sejam $\dim E = m$, $\dim F = m^2$, $(e_1, \ldots, e_m)$ uma base ordenada de E e $\{w_{ij}; (i, j) \in I_m \times I_m\}$ uma base de F. Seja $f \colon E \times E \to F$ a aplicação bilinear tal que $f(e_i, e_j) = w_{ij}$. Dado $z = \sum_{i,j=1}^{m} \zeta^{ij} w_{ij}$ em F, prove que z é da forma$f(x, y)$, $x, y \in E$, se, e somente se, a matriz (ζ^{ij}) tem posto ≤ 1. (O posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes.)

3

Aplicações Multilineares Alternadas

Uma aplicação r-linear $f\colon E \times \cdots \times E \to F$ chama-se *alternada* quando $f(v_1, \ldots, v_r) = 0$ sempre que a seqüência $(v_1, \ldots, v_r)$ tiver repetições. Ou seja:

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots, v_r) = 0,$$

quaisquer que sejam $v_1, \ldots, v_r,\ v \in E$.

A fim de que $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ seja alternada é necessário e suficiente que f seja *anti-simétrica*, isto é, que

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_r \in E$.

Para provar isto, escrevamos, por simplicidade,

$$f(v_1, \ldots, u, \ldots, v, \ldots, v_r) = \varphi(u, v).$$

Então f alternada implica:

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(u + v, u + v) &= \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v) \\ &= \varphi(u, v) + \varphi(v, u), \end{aligned}$$

donde $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$, de modo que f é anti-simétrica.

Reciprocamente, se f é anti-simétrica, então $\varphi(v, v) = -\varphi(v, v)$, e daí $2 \cdot \varphi(v, v) = 0$, logo $\varphi(v, v) = 0$ e f é alternada.

Indicaremos com a notação $\mathfrak{A}_r(E;F)$ o conjunto das aplicações r-lineares alternadas $f\colon E\times\cdots\times E\to F$. É fácil ver que $\mathfrak{A}_r(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}_r(E;F)$.

Exemplos:

1) Toda aplicação linear $f\colon E\to F$ é trivialmente alternada, já que não é possível violar a condição de alternabilidade. Assim, $\mathfrak{A}_1(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$.

2) Se $f\colon \mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}\to F$ é r-linear então $f(t_1,\ldots,t_r) = t_1\cdot t_2\cdot\ldots\cdot t_r\cdot v$, onde $v = f(1,\ldots,1)\in F$. Portanto, quando $r>1$, f só pode ser alternada se $v=0$, isto é, se f for indenticamente nula. Assim, $\mathfrak{A}_r(\mathbb{R};F) = 0$ para $r>1$.

3) A aplicação bilinear $f\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(u,v) = u^1v^2 - u^2v^1$, onde $u=(u^1,u^2)$ e $v=(v^1,v^2)$, é alternada. Considerando a base canônica (e^1,e^2) em $(\mathbb{R}^2)^*$, temos $f = e^1\cdot e^2 - e^2\cdot e^1$. Mais geralmente, sejam quais forem as formas lineares $g,h\in(\mathbb{R}^2)^*$, a forma bilinear $f = g\cdot h - h\cdot g$ é alternada.

4) Seja $f\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o produto vetorial: $f(u,v) = u\times v$. Considerando a base canônica (e_1,e_2,e_3) em $\mathbb{R}^3$, f é definida (vide Proposição 4, Capítulo 2) como a aplicação bilinear tal que $e_1\times e_1 = e_2\times e_2 = e_3\times e_3 = 0$, $e_1\times e_2 = -e_2\times e_1 = e_3$, $e_2\times e_3 = -e_3\times e_2 = e_1$, $e_3\times e_1 = -e_1\times e_3 = e_2$. Daí resulta que, para $u=(u^1,u^2,u^3)$ e $v=(v^1,v^2,v^3)$ arbitrários em $\mathbb{R}^3$, tem-se:

$$\begin{aligned}
f(u,v) = u\times v &= (u^1e_1+u^2e_2+u^3e_3)\times(v^1e_1+v^2e_2+v^3e_3)\\
&= (u^2v^3-u^3v^2)e_1 + (u^3v^1-u^1v^3)e_2 + (u^1v^2-u^2v^1)e_3\\
&= (u^2v^3-u^3v^2,\ u^3v^1-u^1v^3,\ u^1v^2-u^2v^1).
\end{aligned}$$

Vê-se imediatamente que $f(u,u)=0$ para qualquer $u\in\mathbb{R}^3$, logo f é alternada.

Proposição 1. *Seja $f\colon E\times\cdots\times E\to F$ r-linear alternada. Se $v_1,\ldots,v_r\in E$ são linearmente dependentes, então $f(v_1,\ldots,v_r)=0$.*

Demonstração: Sendo os vetores $v_1,\ldots,v_r$ linearmente dependentes, um deles, digamos v_i, é combinação linear dos anteriores: $v_i = \sum\limits_{j<i}\alpha^j v_j$.

Segue-se que

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_r) &= f(v_1, \ldots, \sum_{j<i} \alpha^j v_j, \ldots, v_r) \\ &= \sum_{j<i} \alpha^j f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = 0, \end{aligned}$$

pois f é alternada. □

Observação: A Proposição 1, apesar de sua simplicidade, fornece um critério útil para testar a independência linear de r vetores $v_1, \ldots, v_r \in E$. Se existir alguma aplicação r-linear alternada $f\colon E \times \cdots \times E \to F$ tal que $f(v_1, \ldots, v_r) \neq 0$, então $v_1, \ldots, v_r$ serão linearmente independentes. Isto indica também que obter uma aplicação multilinear alternada não identicamente nula é uma tarefa não inteiramente trivial.

Corolário. *Se $r > \dim E$ então $\mathfrak{A}_r(E; F) = 0$ seja qual for F.*

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma permutação $\sigma \in S_r$ induz um endomorfismo linear no espaço vetorial $\mathcal{L}_r(E; F)$. Indicaremos tal endomorfismo com o mesmo símbolo σ e definiremos

$$\sigma\colon \mathcal{L}_r(E; F) \to \mathcal{L}_r(E; F)$$

como a aplicação que associa a cada $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ uma aplicação r-linear $\sigma f \in \mathcal{L}_r(E; F)$, dada por:

$$(\sigma f)(v_1, \ldots, v_r) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}),$$

$v_1, \ldots, v_r \in E$ arbitrários. É imediato verificar que σf é ainda r-linear, que $\sigma(f + g) = \sigma f + \sigma g$ e que, se $t \in \mathbb{R}$, $\sigma(t \cdot f) = t \cdot (\sigma f)$.

Verificaremos agora que, dadas as permutações $\sigma, \rho \in S_r$ e a aplicação r-linear $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$, tem-se $\sigma(\rho f) = (\sigma\rho) f$.

Com efeito, dados arbitrariamente $v_1, \ldots, v_r \in E$, escrevamos, para cada $i \in I_r$, $w_i = v_{\sigma(i)}$. Então $w_{\rho(i)} = v_{\sigma\rho(i)}$. Logo:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho f)(v_1, \ldots, v_r) &= (\rho f)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = (\rho f)(w_1, \ldots, w_r) \\ &= f(w_{\rho(1)}, \ldots, w_{\rho(r)}) = f(v_{\sigma\rho(1)}, \ldots, v_{\sigma\rho(r)}) \\ &= [(\sigma\rho) f](v_1, \ldots, v_r). \end{aligned}$$

Em particular, para quaisquer $\sigma \in S_r$ e $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ vale $\sigma^{-1}(\sigma f) = (\sigma^{-1}\sigma) f = f$. O endomorfismo $\sigma\colon \mathcal{L}_r(E; F) \to \mathcal{L}_r(E; F)$ é, portanto, invertível, seu inverso sendo induzido pela permutação σ^{-1}.

Uma aplicação r-linear $f \in \mathcal{L}_r(E;F)$ é anti-simétrica se, e somente se, para toda permutação $\sigma \in S_r$ e toda seqüência de r vetores $v_1, \ldots, v_r$ em E, vale:

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = \varepsilon_\sigma \cdot f(v_1, \ldots, v_r),$$

onde ε_σ é o sinal da permutação σ. (Vide Capítulo 1.)

Em outras palavras, $f \in \mathfrak{A}_r(E;F)$ se, e somente se, f é r-linear e $f = \varepsilon_\sigma \cdot \sigma f$ para toda $\sigma \in S_r$.

Com efeito, se f é anti-simétrica e $\tau \in S_r$ é uma transposição, então $\tau f = -f$ por definição, o que significa $f = \varepsilon_\tau \cdot \tau f$. Como toda permutação σ é um produto $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ de transposições, temos

$$\sigma f = (\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_k) f = \tau_1(\tau_2 \ldots (\tau_k f)) = (-1)^k f = \varepsilon_\sigma \cdot f.$$

Reciprocamente, se $f{=}\varepsilon_\sigma \cdot \sigma f$ para toda $\sigma{\in}S_r$, em particular $\tau f{=}-f$ para toda transposição τ, logo f é anti-simétrica.

A fim de obter aplicações r-lineares alternadas, introduziremos o *operador de anti-simetrização*. Trata-se de um endomorfismo linear $A\colon \mathcal{L}_r(E;F) \to \mathcal{L}_r(E;F)$, definido por

$$A \cdot f = \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma \cdot \sigma f, \quad f \in \mathcal{L}_r(E;F).$$

Assim, por exemplo, dada $f \in \mathcal{L}_2(E;F)$, temos

$$(A \cdot f)(u,v) = f(u,v) - f(v,u).$$

Se $f \in \mathcal{L}_3(E;F)$ então:

$$\begin{aligned}(A \cdot f)(u,v,w) = f(u,v,w) - f(u,w,v) + f(w,u,v)\\ - f(w,v,u) + f(v,w,u) - f(v,u,w).\end{aligned}$$

Antes de examinar algumas propriedades do operador A, observemos que se $\rho \in S_r$ é uma permutação fixada, quando σ varia entre todas as permutações em S_r, o produto $\rho\sigma$ assume uma, e uma só vez, cada valor em S_r. (Isto quer dizer que a aplicação $\sigma \mapsto \rho\sigma$ é uma bijeção de S_r.) Assim sendo, vale a igualdade abaixo, que será utilizada em alguns argumentos do texto:

$$\sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma \cdot \sigma f = \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_{\sigma\rho} \cdot \sigma\rho f = A \cdot f.$$

Proposição 2. *Seja* $f \in \mathcal{L}_r(E;F)$. *Então:*

(a) $A \cdot f \in \mathfrak{A}_r(E;F)$;

(b) f *é alternada se, e somente se,* $A \cdot f = r!f$;

(c) *Se existe uma permutação ímpar* $\rho \in S_r$ *tal que* $\rho f = f$ *então* $A \cdot f = 0$.

Demonstração:

(a) Para qualquer permutação $\rho \in S_r$, temos

$$\rho(A \cdot f) = \rho(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \cdot \sigma f) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \cdot \rho\sigma f = \varepsilon_\rho \cdot \sum_\sigma \varepsilon_{\rho\sigma} \cdot \rho\sigma f = \varepsilon_\rho \cdot Af$$

e portanto $A \cdot f$ é alternada.

(b) Se $f \in \mathfrak{A}(E;F)$ então $\varepsilon_\sigma \cdot \sigma f = f$ para toda $\sigma \in S_r$, de modo que $A \cdot f = r!f$. Reciprocamente, se $A \cdot f = r!f$ então $f = \frac{1}{r!} A \cdot f = A(\frac{1}{r!} f)$, logo f é alternada, pela parte (a) demonstrada acima.

(c) Finalmente, se tivermos $\rho f = f$ com $\varepsilon_\rho = -1$, então

$$A \cdot f = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \cdot \sigma f = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \cdot \sigma\rho f = -\sum_\sigma \varepsilon_{\sigma\rho} \cdot \sigma\rho f = -A \cdot f,$$

e portanto $A \cdot f = 0$. Isto conclui a demonstração. □

Corolário. *O operador* A *de anti-simetrização aplica* $\mathcal{L}_r(E;F)$ *sobre o subespaço* $\mathfrak{A}_r(E;F)$ *das aplicações* r*-lineares alternadas.*

Mostraremos a seguir (Proposição 3) que, tomando a base de $\mathcal{L}_r(E;\mathbb{R})$ obtida na Proposição 3, Capítulo 2, e anti-simetrizando seus elementos obteremos essencialmente uma base de $\mathfrak{A}_r(E;F)$. ("Essencialmente" significa que basta anti-simetrizar alguns elementos da base de $\mathcal{L}_r(E;\mathbb{R})$. Se anti-simetrizarmos todos não obteremos uma base porque vão ocorrer elementos repetidos, com o mesmo sinal ou com sinal trocado.)

Consideremos então um espaço vetorial E e a aplicação r-linear $P\colon E^* \times \cdots \times E^* \to \mathcal{L}_r(E;\mathbb{R})$ que associa a $f^1, \ldots, f^r \in E^*$ seu produto tensorial $P(f^1, \ldots, f^r) = f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r$, conforme definido no Exemplo 5, Capítulo 2. Compondo P com o operador A de anti-simetrização, obtemos a aplicação r-linear

$$\varphi = A \circ P\colon E^* \times \cdots \times E^* \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}).$$

Dadas $f^1, \ldots, f^r \in E^*$, temos assim:

$$\varphi(f^1, \ldots, f^r) = A \cdot (f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r).$$

Com relação ao produto tensorial, observaremos que, dadas $f^1, \ldots, f^r \in E^*$ e $\sigma \in S_r$, pondo $f = f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r$ vale a fórmula:

$$\sigma^{-1} f = f^{\sigma(1)} \cdot f^{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot f^{\sigma(r)}.$$

Verifiquemos este fato. Dados $v_1, \ldots, v_r \in E$, vem, por definição:

$$\begin{aligned}(\sigma^{-1} f)(v_1, \ldots, v_r) &= f(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(r)}) \\ &= f^1(v_{\sigma^{-1}(1)}) \cdot f^2(v_{\sigma^{-1}(2)}) \cdot \ldots \cdot f^r(v_{\sigma^{-1}(r)}).\end{aligned}$$

No último produto acima, o fator que possui índice superior igual a $\sigma(i)$ é $f^{\sigma(i)}(v_i)$. Alterando a ordem dos fatores, podemos então escrever

$$\begin{aligned}(\sigma^{-1} f)(v_1, \ldots, v_r) &= f^{\sigma(1)}(v_1) \cdot f^{\sigma(2)}(v_2) \cdot \ldots \cdot f^{\sigma(r)}(v_r) \\ &= (f^{\sigma(1)} \cdot f^{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot f^{\sigma(r)})(v_1, \ldots, v_r),\end{aligned}$$

o que comprova a afirmação feita.

Proposição 3. *A aplicação r-linear $\varphi\colon E^* \times \cdots \times E^* \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, acima definida, é alternada. Além disso, dada uma base ordenada $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^m)$ em E^*, as formas r-lineares alternadas $e^J = \varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$, onde $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ percorre todos os subconjuntos de I_m com r elementos, formam uma base de $\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$. Em particular,* $\dim \mathfrak{A}_r(E,\mathbb{R}) = \binom{m}{r}$.

Demonstração: Para provar que φ é alternada, tomemos $f^1, \ldots, f^r \in E^*$ com $f^i = f^j$, $i \neq j$. Considerando a transposição $\tau \in S_r$ com $\tau(i) = j$, e o produto tensorial $f = f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r$, temos $\tau f = f$, em virtude da fórmula acima demonstrada. Como $\varepsilon_\tau = -1$, segue-se da Proposição 2 que $\varphi(f^1, \ldots, f^r) = A \cdot f = 0$, logo φ é uma aplicação r-linear alternada. Para demonstrar a segunda afirmação, recordemos (Proposição 2, Capítulo 2) que os produtos tensoriais $e^{(s)} = e^{i_1} \cdot e^{i_2} \ldots e^{i_r}$, onde $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$ descreve todas as seqüências de r elementos em I_m, constituem uma base de $\mathcal{L}_r(E;\mathbb{R})$. Como a imagem de $A\colon \mathcal{L}_r(E;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ é todo o espaço $\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, segue-se que as formas $\varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = A \cdot e^{(s)}$ geram o espaço vetorial $\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$. Além disso, sendo φ alternada, temos $\varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = A \cdot e^{(s)} = 0$ quando

a seqüência (s) possui elementos repetidos. E, como $\varphi(v_1, \dots, v_r)$ no máximo muda de sinal quando alteramos a ordem de suas variáveis, vemos que as formas $e^J = \varphi(e^{j_1}, \dots, e^{j_r})$, com $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\}$ são suficientes para gerar $\mathfrak{A}_r(E; \mathbb{R})$. Resta apenas provar que estas formas são linearmente independentes. Para isto, escrevamos explicitamente:

$$e^J = A \cdot (e^{j_1} \cdot e^{j_2} \dots e^{j_r}) = \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma e^{j_{\sigma(1)}} \cdot e^{j_{\sigma(2)}} \cdot \dots \cdot e^{j_{\sigma(r)}}.$$

Daí se vê que, se indicarmos com a notação $|s| = \{i_1, \dots, i_r\}$ o *conjunto* dos elementos da seqüência $(s) = (i_1, \dots, i_r)$, teremos

$$e^J = \sum_{|s|=J} \pm e^{(s)}, \qquad (*)$$

a soma se estendendo a todas as seqüências (s) tais que $|s| = J$, isto é, seqüências que diferem de $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ apenas pela ordem dos seus elementos. Para cada uma dessas seqüências tem-se $(s) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(r)})$ e o sinal de $e^{(s)}$ na soma acima é $+$ ou $-$ conforme ε_σ seja igual a $+1$ ou -1. Segue-se da igualdade (*) e da independência linear das $e^{(s)}$, que as formas e^J são linearmente independentes. □

Corolário 1. *Se* $\dim E = m$, *então* $\dim \mathfrak{A}_m(E; \mathbb{R}) = 1$.

Corolário 2. *Se* $\dim E = m$, *então* $\dim \mathfrak{A}_r(E; \mathbb{R}^n) = \binom{m}{r} \cdot n$.

Com efeito, toda aplicação $f\colon E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}^n$ corresponde a n funções reais $f^1, \dots, f^n\colon E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$, que são suas coordenadas, isto é, $f(v_1, \dots, v_r) = (f^1(v_1, \dots, v_r), \dots, f^n(v_1, \dots, v_r))$. É imediato verificar que f é r-linear se, e somente se, cada uma de suas coordenadas f^i é uma forma r-linear e, além disso, f é alternada se, e somente se, cada f^i o é. A correspondência biunívoca $f \leftrightarrow (f^1, \dots, f^n)$ estabelece portanto um isomorfismo canônico

$$\mathfrak{A}_r(E; \mathbb{R}^n) \approx [\mathfrak{A}_r(E; \mathbb{R})]^n.$$

Daí resulta o corolário.

As formas alternadas e^J, definidas na proposição acima, podem ser caracterizadas como as única formas r-lineares $e^J\colon E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$ tais que

$$e^J(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \{i_1, \dots, i_r\} \neq J \\ \varepsilon_\sigma, & \text{se } (i_1, \dots, i_r) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(r)}), \end{cases}$$

onde $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_r)$ é a base de E da qual $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^r)$ é dual.

Proposição 4. *Sejam E, F espaços vetoriais. Dada uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E, escolhamos arbitrariamente, para cada subconjunto $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ com r elementos, um vetor $w_J \in F$. Existe uma, e somente uma, aplicação r-linear alternada $f\colon E \times \cdots \times E \to F$ tal que $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = w_J$ para cada J.*

Demonstração: Para $v_1, \ldots, v_r \in E$ quaisquer, ponhamos

$$f(v_1, \ldots, v_r) = \sum_J e^J(v_1, \ldots, v_r) w_J,$$

a soma sendo estendida a todos os subconjuntos $J \subset I_m$ com r elementos. Em virtude da observação feita acima sobre os e^J, vemos que, de fato, $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = w_J$ para cada $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$. É imediato que f é alternada, pois cada e^J o é. Quanto à unicidade, observemos que, sendo f alternada, os valores $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = w_J$ para $j_1 < \cdots < j_r$ determinam todos os valores $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ para seqüências arbitrárias $(i_1, \ldots, i_r)$ em I_m. (Com efeito, tal valor é zero se a seqüência tiver repetições e é igual a $\varepsilon_\sigma w_J$ se a seqüência diferir de $(j_1, \ldots, j_r)$ por uma permutação $\sigma \in S_r$.) Então f é única, em virtude da Proposição 2, Capítulo 2. □

Proposição 5. *Sejam E, F espaços vetoriais, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma base ordenada em E e $\mathcal{F} = (w_1, \ldots, w_n)$ uma base ordenada em F. Para cada subconjunto $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ e cada inteiro $k \in I_n$ seja $f_k^J(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) = w_k$ e $f_k^J(e_{p_1}, \ldots, e_{p_r}) = 0$ se $P = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_r\} \neq J$. As aplicações f_k^J assim definidas constituem uma base de $\mathfrak{A}_r(E; F)$. Em particular,* $\dim \mathfrak{A}_r(E; F) = \binom{m}{r} \cdot n$.

Demonstração: Em virtude da Proposição 4 existe, para cada J e cada k, uma única aplicação r-linear alternada $f_k^J\colon E \times \cdots \times E \to F$ com as propriedades requeridas no enunciado. Mostremos que estas aplicações geram $\mathfrak{A}_r(E; F)$. Com efeito, dada arbitrariamente $f \in \mathfrak{A}_r(E; F)$, definamos os números ξ_J^k, para cada $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ e cada $k \in I_n$, como as coordenadas de $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) \in F$ relativamente à base $\mathcal{F}$, ou seja, pela relação:

$$f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = \sum_{k=1}^{n} \xi_J^k w_k.$$

Consideremos agora a aplicação r-linear alternada

$$g = \sum_{k,J} \xi_J^k f_k^J,$$

a soma estendendo-se a todos os subconjuntos de r elementos $J \subset I_m$ e a todos os inteiros $k \in I_n$. Para cada um desses J fixado temos:

$$g(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = \sum_{k=1}^{n} \xi_J^k w_k = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}).$$

A unicidade enunciada na Proposição 4 garante então que $f = g$ e portanto as aplicações f_k^J geram $\mathfrak{A}_r(E;F)$. Como os índices (J,k) dessas aplicações são em número de $\binom{m}{r} \cdot n$, basta demonstrar que esta é a dimensão de $\mathfrak{A}_r(E;F)$ para concluir que elas constituem uma base. Ora, a escolha de uma base em F determina um isomorfismo (não-canônico) $F \approx \mathbb{R}^n$ e portanto $\mathfrak{A}_r(E;F) \approx \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}^n)$. O Corolário 2 da Proposição 3 nos dá então $\dim \mathfrak{A}_r(E,F) = \binom{m}{r} \cdot n$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Exercícios

1. Prove que se $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear alternada, existe um número real a tal que $f(u,v) = a(u^1v^2 - v^1u^2)$ para quaisquer $u = (u^1, u^2)$ e $v = (v^1, v^2)$.

2. Toda forma bilinear $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é do tipo $f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x^i x^j$, onde $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $y = (y^1, \ldots, y^m)$, $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Prove que f é alternada se, e somente se, $a_{ij} = -a_{ji}$ para quaisquer $i, j \in I_m$.

3. Seja $\mathfrak{A}_{r,s}(E;F) \subset \mathcal{L}_{r+s}(E;F)$ o subespaço formado pelas aplicações $(r+s)$-lineares de E em F que são alternadas separadamente em relação às r primeiras variáveis e em relação às s últimas. Estabeleça um isomorfismo $\mathfrak{A}_r(E;\mathfrak{A}_s(E;F)) \approx \mathfrak{A}_{r,s}(E;F)$. Calcule a dimensão de $\mathfrak{A}_{r,s}(E;F)$ em função de $\dim E$ e $\dim F$.

4. Seja $N_r(E;F)$ o núcleo do operador de anti-simetrização $A\colon \mathcal{L}_r(E;F) \to \mathfrak{A}_r(E;F)$. Prove que $\mathcal{L}_r(E;F) = \mathfrak{A}_r(E;F) \oplus N_r(E;F)$.

5. Com a notação do exercício anterior, prove que o produto tensorial (vide Exercício 12, Capítulo 2) de uma forma $f \in N_r(E;\mathbb{R})$ por qualquer $g \in \mathcal{L}_s(E;\mathbb{R})$ é uma $(r+s)$-forma $f \cdot g \in N_{r+s}(E;\mathbb{R})$.

6. Através de exemplo, mostre que o produto tensorial de duas formas alternadas pode não ser alternada.

7. Seja $f \in \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R})$, onde $\dim E = m$. Dada uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E, sejam $v_1 = \sum_i x^{i1} e_i, \ldots, v_m = \sum_i x^{im} e_i$. Prove que

$$f(v_1, \ldots, v_m) = \left[\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon_\sigma \cdot x^{\sigma(1)1} \ldots x^{\sigma(m)m} \right] f(e_1, e_2, \ldots, e_m).$$

8. Dizemos que $f \in \mathcal{L}_r(E;F)$ é *simétrica* quando $\sigma f = f$ para toda $\sigma \in S_r$. Prove:

   a) f é simétrica se, e somente se $\tau f = f$ para toda transposição $\tau \in S_r$.

   b) As aplicações r-lineares simétricas constituem um subespaço vetorial $\mathcal{S}_r(E;F) \subset \mathcal{L}_r(E;F)$.

   c) Para todo r, tem-se $\mathcal{S}_r(E;F) \subset N_r(E;F)$. (Vide Exercício 4 acima.) Se $r = 2$, vale a igualdade.

9. Defina o *operador de simetrização* $S \colon \mathcal{L}_r(E;F) \to \mathcal{L}_r(E;F)$ como $S \cdot f = \sum_{\sigma \in S_r} \sigma f$. Prove:

   a) S aplica $\mathcal{L}_r(E;F)$ em $\mathcal{S}_r(E;F)$.

   b) f é simétrica se, e somente se, $S \cdot f = r! f$.

   c) Se f é alternada então $S \cdot f = 0$.

10. Defina $\psi\colon E^* \times \cdots \times E^* \to \mathcal{S}_r(E;\mathbb{R})$ pondo $\psi(f^1,\ldots,f^r) = S\cdot(f^1\cdot f^2\cdot\cdots\cdot f^r)$. Prove:

    a) ψ é uma aplicação r-linear simétrica.

    b) Seja $\mathcal{E} = (e^1,\ldots,e^m)$ uma base ordenada de E^*.

    Para cada seqüência *não-decrescente* $[t] = (k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r)$ de r elementos em I_m consideremos a forma r-linear simétrica $\psi(e^{k_1},e^{k_2},\ldots,e^{k_r}) = e^{[t]}$. Prove que as formas $e^{[t]}$ constituem uma base de $\mathcal{S}_r(E;\mathbb{R})$.

    c) Conclua que $\dim \mathcal{S}_r(E;\mathbb{R}) = \binom{m+r-1}{r}$, a partir da observação de que $(k_1,\ldots,k_r)$ é uma seqüência não-decrescente de r inteiros em I_m se, e somente se, $(k_1, k_2{+}1, k_3{+}2,\ldots,k_r{+}(r{-}1))$ é uma seqüência crescente de r inteiros em I_{m+r-1}.

11. Uma aplicação r-linear $f\colon E\times\cdots\times E \to F$ é alternada se, e somente se, $v_i = v_{i+1}$ $(1\leq i<r)$ implica $f(v_1,\ldots,v_i,v_{i+1},\ldots,v_r)=0$.

12. Uma aplicação r-linear $f\colon E\times\cdots\times E\to F$ é alternada se, e somente se, $v_1,\ldots,v_r$ linearmente dependente implica $f(v_1,\ldots,v_r)=0$.

13. Seja $A\colon \mathcal{L}_r(E;F) \to \mathcal{L}_r(E;F)$ o operador de anti-simetrização. Prove que, para toda $f\in\mathcal{L}_r(E;F)$ e toda $\sigma\in S_r$, tem-se $A\cdot(\sigma f) = \varepsilon_\sigma\cdot Af$.

14. Seja $T\colon \mathcal{L}_r(E;F) \to \mathcal{L}_r(E;F)$ uma transformação linear com as seguintes propriedades:

    a) $T\cdot(\sigma f) = \varepsilon_\sigma\cdot Tf$ para toda $f\in\mathcal{L}_r(E;F)$ e toda $\sigma\in S_r$.

    b) Se f é alternada então $T\cdot f = r!Tf$. Prove que T coincide com o operador de anti-simetrização.

15. Prove que o núcleo $N_r(E;F)$ do operador de anti-simetrização $A\colon\mathcal{L}_r(E;F)\to\mathcal{L}_r(E;F)$ é gerado pelas aplicações r-lineares da forma $g = f - \varepsilon_\sigma\cdot\sigma f$, onde $f\in\mathcal{L}_r(E;F)$ e $\sigma\in S_r$.

16. Seja $f,g\in\mathcal{S}_r(E;F)$. Prove que $f(v,v,\ldots,v) = g(v,v,\ldots,v)$ para todo $v\in E$ implica $f=g$.

17. Seja $f\colon E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$ uma aplicação $(r-1)$-linear alternada. Defina
$$g\colon \underbrace{E \times \cdots \times E}_{r} \to E$$
pondo
$$g(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^i f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_r) \cdot x_i,$$
onde $\hat{x}_i$ significa omissão da variável x_i. Prove que g é r-linear alternada.

4

Determinantes

Como aplicação do fato de que $\dim E = m$ implica $\dim \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R}) = 1$. (Corolário 1, Prop. 3, Cap. 3) daremos uma definição intrínseca do determinante de um endomorfismo linear. Demonstraremos algumas propriedades básicas do determinante, deixando para retormar o assunto no Capítulo 8, depois de havermos introduzido a Álgebra de Grassmann $\Lambda(E)$ de um espaço vetorial E. Um dos principais resultados que demonstraremos no presente capítulo é o Corolário da Proposição 5, segundo o qual toda aplicação multilinear alternada se exprime através de determinantes. Ou seja: o determinante é essencialmente a única aplicação multilinear alternada não-trivial.

Comecemos com uma situação mais geral.

Uma aplicação linear $T\colon E \to F$ induz, para cada inteiro $r > 0$, uma nova aplicação linear

$$T^{\#}\colon \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}),$$

definida pela regra:

$$(T^{\#} \cdot f)(v_1, \ldots, v_r) = f(Tv_1, \ldots, Tv_r),$$

onde $f \in \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ e $v_1, \ldots, v_r \in E$ são arbitrários. É imediato verificar que $f \in \mathfrak{A}_r(\mathbb{R};\mathbb{R})$ implica de fato $T^{\#} \cdot f \in \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ e que $T^{\#}$ é linear. Verificam-se facilmente também as seguintes propriedades:

1) Se $T = \mathrm{id}\colon E \to E$, então $T^{\#} = \mathrm{id}\colon \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$.

2) Dadas $S\colon E \to F$ e $T\colon F \to G$ lineares, temos

$$(T \circ S)^{\#} = S^{\#} \circ T^{\#} \colon \mathfrak{A}_r(G;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}).$$

Em particular, se $S\colon E \to F$ é um isomorfismo, concluimos que $(S^{-1})^{\#} \circ S^{\#} = (S \circ S^{-1})^{\#} = (\mathrm{id})^{\#} = \mathrm{id}\colon \mathfrak{A}_r(F;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(F;\mathbb{R})$ e $S^{\#} \circ (S^{-1})^{\#} = \mathrm{id}\colon \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, de modo que se $S\colon E \to F$ é um isomorfismo então $S^{\#}\colon \mathfrak{A}_r(F;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ é também um isomorfismo, sendo $(S^{\#})^{-1} = (S^{-1})^{\#}$.

Consideremos agora um endomorfismo linear $T\colon E \to E$, onde $\dim E = m$. Como $\dim \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R}) = 1$, segue-se que o endomorfismo induzido,

$$T^{\#}\colon \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R}),$$

é meramente a multiplicação por um escalar fixo. Isto é, existe um número real λ tal que $T^{\#} \cdot f = \lambda \cdot f$ para toda forma m-linear alternada $f\colon E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$.

Poremos então $\lambda = \det(T)$ e diremos que λ é o *determinante* do endomorfismo T.

Em termos mais explícitos, o determinante de um endomorfismo $T\colon E \to E$ (onde $\dim E = m$) é o único número real $\det(T)$ tal que

$$f(T \cdot v_1, \ldots, T \cdot v_m) = \det(T) \cdot f(v_1, \ldots, v_m), \qquad (*)$$

quaisquer que sejam $v_1, \ldots, v_m \in E$ e $f \in \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R})$.

Proposição 1. *O determinante de um endomorfismo $T\colon E \to E$ tem as seguintes propriedades:*

1) *Se $T = \mathrm{id}\colon E \to E$ então $\det(T) = 1$;*

2) $\det(S \circ T) = \det(S) \cdot \det(T)$*;*

3) $\det(T) \neq 0$ *se,e somente se, T é invertível.*

Demonstração: 1) é evidente, pois $(\mathrm{id})^{\#} = \mathrm{id}$. A propriedade 2) resulta imediatamente da relação $(S \circ T)^{\#} = T^{\#} \circ S^{\#}$. Com efeito, para toda $f \in \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R})$ temos $(S \circ T)^{\#} \cdot f = T^{\#} \circ (S^{\#} \cdot f) = T^{\#} \cdot (\det(S) \cdot f) = \det(T) \cdot \det(S) \cdot f$. Logo $\det(S \circ T) = \det(S) \cdot \det(T)$. Destas duas propriedades já resulta que, se T é invertível, então $1 = \det(\mathrm{id}) = \det(T \circ T^{-1}) = \det(T) \cdot \det(T^{-1})$. Concluímos que $\det(T) \neq 0$ e, mais

ainda, que $\det(T^{-1}) = (\det T)^{-1}$. Reciprocamente se $\det(T) \neq 0$ então, tomando uma base ordenada $(e_1, \ldots, e_m)$ em E e $f = e^J \in \mathfrak{A}_m(E; \mathbb{R})$, com $J = (1, 2, \ldots, m)$, temos $f(e_1, \ldots, e_m) = 1$, logo a relação (*) acima nos dá

$$f(T \cdot e_1, \ldots, T \cdot e_m) = \det(T).$$

Como estamos supondo $\det(T) \neq 0$, segue-se da Proposição 1, Capítulo 3 que os vetores $T \cdot e_1, \ldots, T \cdot e_m$ são linearmente independentes e portanto constituem uma base de E. Assim T transforma uma base de E noutra base e portanto é uma transformação linear invertível. Isto conclui a demonstração da afirmativa 3). □

Tradicionalmente, costuma-se definir primeiro o determinante de uma matriz quadrada. Em seguida, o determinante de um endomorfismo linear é definido como sendo o determinante de uma qualquer de suas matrizes. Procederemos da maneira inversa: definiremos agora o *determinante de uma matriz quadrada* $\alpha = (\alpha^i_j)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, como o determinante da transformação linear $\tilde{\alpha} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, cuja matriz em relação à base canônica $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ de $\mathbb{R}^m$ é α. Isto significa:

$$\det(\alpha) = \det(\tilde{\alpha}), \qquad \text{onde} \qquad \tilde{\alpha} \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i_j e_i; \quad j = 1, \ldots, m.$$

A proposição abaixo é a caracterização clássica, devida a Weierstrass, do determinante de uma matriz.

Seja $M(m \times m) = \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$ o espaço vetorial das matrizes reais $m \times m$, onde identificamos cada matriz com a m-upla de vetores de $\mathbb{R}^m$ que são seus vetores-coluna.

Proposição 2. *O determinante é a única função m-linear alternada* $\det \colon M(m \times m) \to \mathbb{R}$ *dos vetores-coluna de uma matriz que assume o valor 1 na matriz identidade.*

Demonstração: Seja $f_0 \in \mathfrak{A}_m(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ a única forma m-linear alternada tal que $f_0(e_1, \ldots, e_m) = 1$, onde $(e_1, \ldots, e_m)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Então, dada qualquer matriz $\alpha = (\alpha^i_j) \in M(m \times m)$, cujos vetores-coluna são $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, com $\alpha_j = (\alpha^1_j, \alpha^2_j, \ldots, \alpha^m_j)$, temos $\alpha_1 = \tilde{\alpha} \cdot e_1, \ldots, \alpha_m = \tilde{\alpha} \cdot e_m$ e portanto:

$$\begin{aligned}\det(\alpha) = \det(\tilde{\alpha}) &= \det(\tilde{\alpha}) \cdot f_0(e_1, \ldots, e_m) = f_0(\tilde{\alpha} \cdot e_1, \ldots, \tilde{\alpha} \cdot e_m) \\ &= f_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).\end{aligned}$$

Isto mostra que $\det(\alpha)$ é uma função m-linear alternada das colunas de α, que toma o valor 1 na matriz cujas colunas são $e_1, \ldots, e_m$, isto é, na matriz identidade. A unicidade é óbvia a partir da unicidade de f_0. □

Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão. Dois endomorfismos $S \in \mathcal{L}(E)$ e $T \in \mathcal{L}(F)$ dizem-se *conjugados* quando existe um isomorfismo $\varphi\colon E \to F$ tal que $T = \varphi \circ S \circ \varphi^{-1}$. Isto quer dizer $T \circ \varphi = \varphi \circ S$. Assim, afirmar que S e T são conjugados equivale a dizer que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S} & E \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ F & \xrightarrow{T} & F \end{array}$$

Lema. *Se duas transformações lineares* $S\colon E \to E$ *e* $T\colon F \to F$ *são conjugadas então* $\det(S) = \det(T)$.

Demonstração: Se fosse $E = F$ então existiria $\det(\varphi)$. Então, usando o item 2) da Proposição 1, escreveríamos $\det(T) = \det(\varphi) \cdot \det(S) \cdot \det(\varphi)^{-1} = \det(S) \cdot \det(\varphi) \cdot \det(\varphi)^{-1} = \det(S)$. Como porém não faz sentido falar em $\det(\varphi)$ quando $E \neq F$, usamos as propriedades da operação $\#$, segundo as quais obtemos $T^{\#} = (\varphi^{\#})^{-1} \circ S^{\#} \circ \varphi^{\#}$. Logo, para toda $f \in \mathfrak{A}_m(F; \mathbb{R})$, onde $m = \dim E$, vale:

$$\begin{aligned} T^{\#} \cdot f &= (\varphi^{\#})^{-1} \cdot S^{\#} \cdot (\varphi^{\#} \cdot f) = (\varphi^{\#})^{-1} \cdot \det(S) \cdot (\varphi^{\#} \cdot f) \\ &= \det(S) \cdot (\varphi^{\#})^{-1} \cdot \varphi^{\#} \cdot f = \det(S) \cdot f. \end{aligned}$$

□

Proposição 3. *Seja* $A\colon E \to E$ *um endomorfismo. Para qualquer matriz* $\alpha = (\alpha^i_j)$ *que represente* A *relativamente a uma base de* E*, tem-se* $\det(A) = \det(\alpha)$.

Demonstração: Seja $\alpha = (\alpha^i_j)$ a matriz de A relativamente a uma base ordenada $(v_1, \ldots, v_m)$ de E. Por definição, temos $\det(\alpha) = \det(\tilde{\alpha})$, onde $\tilde{\alpha}$ é o endomorfismo de $\mathbb{R}^m$ cuja matriz relativamente à base canônica $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbb{R}^m$ é a α. Então, considerando o isomorfismo $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^m$ tal que $\varphi \cdot v_1 = e_1, \ldots, \varphi \cdot v_m = e_m$, temos $\varphi \circ A = \tilde{\alpha} \circ \varphi$, isto é, $A\colon E \to E$ e $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ são conjugados. Segue-se do Lema que $\det(A) = \det(\tilde{\alpha})$, ou seja, $\det(A) = \det(\alpha)$. □

Corolário. *Seja* $\dim E = m$. *Dadas* $f \in \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R})$, $\alpha = (\alpha^i_j) \in M(m \times m)$ *e* $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ *uma base ordenada de* E, *tem-se*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha^i_1 e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \alpha^i_m e_i\right) = \det(\alpha) \cdot f(e_1, \ldots, e_m).$$

Com efeito, α é a matriz, relativa à base $\mathcal{E}$, do endomorfismo $A\colon E \to E$ tal que $A \cdot e_j = \sum\limits_i \alpha^i_j e_i$ $(j = 1, \ldots, m)$. Logo $\det(\alpha) = \det(A)$ e o corolário resulta imediatamente da definição de determinante de um endomorfismo.

Seja $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma base ordenada de E. Dada uma seqüência de m vetores $u_1, \ldots, u_m \in E$, define-se o *determinante desses vetores em relação à base* $\mathcal{E}$ como sendo o determinante da matriz $\alpha = (\alpha^i_j)$ das coordenadas dos vetores u_j na base $\mathcal{E}$, ou seja: $u_j = \sum_{i=1}^m \alpha^i_j e_i$ $(j = 1, \ldots, m)$. Escreve-se

$$\det_{\mathcal{E}}[u_1, \ldots, u_m]$$

para indicar tal determinante.

Quando $E = \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{E}$ é a base canônica, escreveremos simplesmente

$$\det[u_1, \ldots, u_m]$$

que, neste caso, é o determinante da matriz $m \times m$ cujos vetores-coluna são $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^m$.

Resulta do corolário acima que, dadas a base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E e a seqüência de vetores $u_1, \ldots, u_m \in E$, tomando-se $J = \{1 < 2 < \cdots < m\}$ tem-se:

$$\det_{\mathcal{E}}[u_1, \ldots, u_m] = e^J(u_1, \ldots, u_m),$$

onde, de acordo com a notação da Proposição 3, Capítulo 3, e^J é a anti-simetrizada do produto tensorial $e^1 \cdot e^2 \cdot \ldots \cdot e^m$.

Obteremos agora a expressão clássica do determinante de uma matriz quadrada $\alpha = (\alpha^i_j)$ como soma de todos os produtos que se podem formar escolhendo um elemento de cada linha e de cada coluna de α e precedendo cada produto de um sinal "conveniente".

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ os vetores-coluna de α. Temos

$$\alpha_1 = (\alpha^1_1, \alpha^2_1, \ldots, \alpha^m_1), \ldots, \alpha_m = (\alpha^1_m, \alpha^2_m, \ldots, \alpha^m_m).$$

Considerando a forma m-linear alternada $f_0 \in \mathfrak{A}_m(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ tal que $f_0(e_1,\ldots,e_m) = 1$, onde $(e_1,\ldots,e_m)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$, sabemos que

$$\det(\alpha) = f_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_m).$$

Sabemos também que f_0 é a anti-simetrizada do produto tensorial $e^1 \cdot e^2 \cdot \ldots \cdot e^m$ e portanto

$$f_0 = \sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon_\sigma \cdot e^{\sigma(1)} \cdot e^{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot e^{\sigma(m)}.$$

Segue-se que:

$$\det(\alpha) = \sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon_\sigma \alpha_1^{\sigma(1)} \cdot \alpha_2^{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_m^{\sigma(m)}. \qquad (**)$$

Esta expressão é utilizada freqüentemente como definição do determinante de uma matriz.

Proposição 4. *Seja* ${}^t\alpha$ *a transposta de uma matriz* $\alpha \in M(m\times m)$. *Tem-se* $\det(\alpha) = \det({}^t\alpha)$.

Demonstração: Considerando novamente a forma $f_0 \in \mathfrak{A}_m(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$, anti-simetrizada do produto tensorial $e^1 \cdot e^2 \cdot \ldots \cdot e^m$, a definição do operador de anti-simetrização nos dá $f_0 = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \cdot \sigma(e^1 \cdot e^2 \cdot \ldots \cdot e^m)$. Logo:

$$\begin{aligned}\det(\alpha) &= f_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\\ &= \sum \varepsilon_\sigma \cdot e^1(\alpha_{\sigma(1)}) \cdot e^2(\alpha_{\sigma(2)}) \cdot \ldots \cdot e^m(\alpha_{\sigma(m)})\\ &= \sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon_\sigma \cdot \alpha^1_{\sigma(1)} \cdot \alpha^2_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha^m_{\sigma(m)}.\end{aligned}$$

Comparando esta expressão de $\det(\alpha)$ com a fórmula (**) recém obtida, concluímos que $\det(\alpha) = \det({}^t\alpha)$. □

Em particular, o determinante de uma matriz $m \times m$ pode também ser caracterizado como uma forma m-linear alternada dos seus vetores-linha: é a única tal forma que assume o valor 1 na matriz identidade.

Continuaremos sempre adotando a notação introduzida na Proposição 3, Capítulo 3: dada uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_m)$ em E, indicaremos com $\mathcal{E}^* = (e^1,\ldots,e^m)$ a base dual e, para cada subconjunto

$J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\}$ de r elementos em I_m, representaremos pelo símbolo e^J a forma r-linear alternada obtida por anti-simetrização do produto tensorial $e^{j_1} \cdot e^{j_2} \cdot \ldots \cdot e^{j_r}$. Como vimos naquela proposição, quando J percorre os subconjuntos de I_m com r elementos, as formas e^J constituem uma base do espaço vetorial $\mathfrak{A}_r(E; \mathbb{R})$.

Outra notação que adotaremos permanentemente é a seguinte. Dada uma matriz $\alpha = (\alpha^i_j)$, com m linhas e r colunas ($r < m$), para cada subconjunto $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ com r elementos, indicaremos com α^J a matriz $r \times r$ obtida escolhendo-se as linhas de α cujos índices (superiores) pertencem ao conjunto J.

Proposição 5. *Seja $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma base ordenada de E. Dados os vetores $v_1 = \sum_i \alpha^i_1 e_i, \ldots, v_r = \sum_i \alpha^i_r e_i$ em E e o conjunto $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$, temos*

$$e^J(v_1, \ldots, v_r) = \det(\alpha^J)$$

onde $\alpha = (\alpha^i_j)$ é a matriz $m \times r$ cujo j-ésimo vetor coluna é formado pelas coordenadas $\alpha^1_j, \alpha^2_j, \ldots, \alpha^m_j$ de v_j na base $\mathcal{E}$.

Demonstração: O valor $e^J(v_1, \ldots, v_r)$ é evidentemente uma função r-linear alternada das colunas da matriz α. Além disso, essa função se anula quando uma das suas variáveis assume o valor e_k, com $k \notin J$: $e^J(w_1, \ldots, e_k, \ldots, w_r) = 0$ se $k \notin J$. Por conseguinte, para $1 \leq i \leq r$ e $k \notin J$, temos:

$$e^J(v_1, \ldots, v_i + \lambda e_k, \ldots, v_r) = e^J(v_1, \ldots, v_r).$$

Isto significa que $e^J(v_1, \ldots, v_r)$ depende apenas das coordenadas α^i_j cujos índices superiores pertencem a J, ou seja, é uma função r-linear alternada das colunas de α^J, a qual toma o valor 1 quando $\alpha^J =$ matriz identidade, pois isto corresponde a $v_1 = e_{j_1}, \ldots, v_r = e_{j_r}$. Pela caracterização weierstrassiana do determinante, concluimos que $e^J(v_1, \ldots, v_r) = \det(\alpha^J)$. □

Corolário. *Seja $f\colon E \times \cdots \times E \to F$ uma aplicação r-linear alternada. Dada uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E, para cada subconjunto $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\} \subset I_m$, seja $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = w_J \in F$. Então, se $v_1 = \sum_i \alpha^i_1 e_i, \ldots, v_r = \sum_i \alpha^i_r e_i$ são vetores de E, tem-se*

$$f(v_1, \ldots, v_r) = \sum_J \det(\alpha^J) \cdot w_J,$$

onde $\alpha = (\alpha^i_j)$ *é a matriz* $m \times r$ *das coordenadas dos vetores* v_j.

Com efeito, temos $f(v_1, \ldots, v_r) = \sum_J e^J(v_1, \ldots, v_r) w_J$. (Vide demonstração da Proposição 4, Capítulo 3.)

O corolário acima mostra que qualquer aplicação multilinear alternada se exprime, de modo simples, a partir do determinante.

Exercícios

1. Se $\dim E = m$ então, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T \in \mathcal{L}(E)$, tem-se $\det(\lambda T) = \lambda^m \cdot \det(T)$.

2. Seja $\dim E = m$. Para todo espaço vetorial F e todo endomorfismo $T \colon E \to E$, o endomorfismo induzido $T^{\#} \colon \mathfrak{A}_m(E; F) \to \mathfrak{A}_m(E; F)$ tem a forma $T^{\#} \cdot f = \det(T) \cdot f$.

3. Indicando com $\langle u, v\rangle$ o produto escalar e com $u \times v$ o produto vetorial dos vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ (vide Exemplo 4, Capítulo 3), prove que $\langle u \times v, w\rangle = \det[u, v, w]$.

4. Quando $\dim E = m$ e $T \in \mathcal{L}(E)$, se tivermos $f(T \cdot v_1, \ldots, T \cdot v_m) = \lambda \cdot f(v_1, \ldots, v_m)$ para *uma* $f \in \mathfrak{A}_m(E; \mathbb{R})$ não-nula e *uma* base ordenada $(v_1, \ldots, v_m)$ de E então $\lambda = \det(T)$.

5. Seja $\dim E = m$. Os vetores $v_1, \ldots, v_m \in E$ são linearmente independentes se, e somente se, para toda $f \neq 0$ em $\mathfrak{A}_m(E; \mathbb{R})$ tem-se $f(v_1, \ldots, v_m) \neq 0$.

6. Seja $\alpha = (\alpha^i_j)$ uma matriz $m \times m$ *anti-simétrica*, isto é, $\alpha^i_j = -\alpha^j_i$ para quaisquer $i, j \in I_m$. Se m for ímpar, tem-se $\det(\alpha) = 0$.

7. Seja α uma matriz quadrada do tipo $\alpha = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, onde β é $r \times r$, I é a matriz identidade $s \times s$ e os zeros significam matrizes nulas $r \times s$ e $s \times r$. Mostre que $\det(\alpha) = \det(\beta)$. Conclua que se $\mu = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ então $\det(\mu) = \det(\beta) \cdot \det(\gamma)$. [Sugestão: $\det(\alpha)$ é uma função multilinear alternada das colunas de β.]

8. Seja α uma matriz $(r+s)\times(r+s)$ do tipo $\alpha = \begin{pmatrix}\beta & \gamma\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$, onde β é $r\times r$, δ é $s\times s$, γ é $r\times s$ e 0 é a matriz nula $s\times r$. Mostre que se $\det(\beta)=0$ então $\alpha = \begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \beta^{-1}\gamma\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$. Mostre que se $\mu = \begin{pmatrix}I & \xi\\ 0 & \eta\end{pmatrix}$ onde I é a matriz identidade $r\times r$ e η $s\times s$, então $\det(\mu)$ não depende de ξ. Conclua que $\det(\mu)=\det(\eta)$. Finalize concluindo que $\det(\alpha)=\det(\beta)\cdot\det(\delta)$.

5

Produto Exterior

Dada uma aplicação r-linear alternada $f\colon E \times \cdots \times E \to F$, seja m a dimensão de E. Pelo último corolário do capítulo anterior, vemos que cada elemento da imagem $f(E\times\cdots\times E)$ é combinação de vetores $w_J \in F$ cujo número não excede $\binom{m}{r}$. Portanto o subespaço de F gerado por $f(E \times \cdots \times E)$ tem no máximo dimensão igual a $\binom{m}{r}$. Esta dimensão máxima ocorre, naturalmente, quando os vetores $w_J = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ são linearmente independentes.

Nosso propósito neste capítulo é examinar as aplicações r-lineares alternadas cujas imagens geram subespaços da maior dimensão possível.

Proposição 1. *Seja $\varphi\colon \times\cdots\times E \to F$ uma aplicação r-linear alternada. As seguintes condições são equivalentes:*

1) *Existe uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E tal que os vetores $\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ com $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m$ formam uma base de F.*

2) $\varphi(E \times \cdots \times E)$ *gera F e* $\dim F = \binom{m}{r}$.

3) *Para todas as bases de E vale a condição 1).*

Demonstração: É claro que 1) $\Rightarrow$ 2) e 3) $\Rightarrow$ 1). Para provar que 2) $\Rightarrow$ 3), basta observar que, dada a base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E, como φ é r-linear alternada, os vetores $\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ com $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m$ geram o mesmo subespaço vetorial de F que o conjunto $\varphi(E \times \cdots \times E)$, ou seja, geram F. Como o número desses vetores é $\leq \binom{m}{r} = \dim F$, segue-se que eles formam uma base de F. $\square$

Quando uma das condições acima é satisfeita (e portanto todas são), diremos que φ é um *produto exterior* em E. Então escrevemos $F = \overset{r}{\wedge} E$ e dizemos que F é uma *potência exterior r-ésima* de E.

A aplicação φ será, neste caso, substituida pela notação

$$\wedge \colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge} E.$$

Escreveremos também $\varphi(v_1, \ldots, v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$.

Como o produto exterior $\wedge$ é uma aplicação r-linear alternada, temos $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0$ se $v_i = v_j$ com $i \neq j$. Equivalentemente:

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(r)} = \varepsilon_\sigma \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$$

para toda permutação $\sigma \in S_r$.

Os elementos de $\overset{r}{\wedge} E$ são chamados r-*vetores*. Os da forma $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ chamam-se r-vetores *decomponíveis*. Todo r-vetor é soma de r-vetores decomponíveis.

Devemos provar a existência e a unicidade (a menos de um isomorfismo) do produto exterior. Antes disso, porém, vejamos um exemplo.

Exemplo 1) O fato de que $\binom{m}{m-1} = m$ sugere a existência de um produto exterior de ordem $m - 1$, $\times \colon \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Ele existe, de fato, como uma generalização do produto vetorial usual $\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (Vide Exemplo 4, Capítulo 3). Definimos $\times \colon \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ como sendo a única aplicação $(m-1)$-linear alternada tal que

$$\begin{aligned} \times\,(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_m) &= (-1)^{m+i} e_i \\ &= e_1 \times \cdots \times e_{i-1} \times e_{i+1} \times \cdots \times e_m. \end{aligned}$$

A existência e a unicidade de $\times$ são asseguradas pela Proposição 4, Capítulo 3. A razão para o fator $(-1)^{m+1}$ prende-se à questão de orientação em $\mathbb{R}^m$, como será explicado posteriormente. Evidentemente, $\times$ é um produto exterior.

Quando $r \neq m - 1$ (e, naturalmente, $r \neq 1$), temos $\binom{m}{r} \neq m$, de modo que o produto exterior $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ de vetores em $\mathbb{R}^m$ deve ser procurado fora do espaço $\mathbb{R}^m$. Daí o nome "exterior".

Existência de $\overset{r}{\wedge}$ - Daremos agora exemplos de produto exterior em qualquer espaço vetorial E.

Primeira construção. Dado E, escolhamos nele uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$. Seja F qualquer espaço vetorial de dimensão $\binom{m}{r}$.

Tomemos arbitrariamente uma base em F e escrevamos os elementos dessa base sob a forma e_J, onde os índices J percorem o conjunto dos subconjuntos de I_m com r elementos. Definamos uma aplicação r-linear alternada $\varphi\colon E\times\cdots\times E \to F$ exigindo que $\varphi(e_{j_1},\ldots,e_{j_r}) = e_J$ para cada $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\} \subset I_m$. Então φ cumpre as condições para ser um produto exterior. Escrevamos $F = \overset{r}{\wedge} E$, $\varphi(v_1,\ldots,v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$.

Esta construção, pela rudeza das suas várias escolhas arbitrárias, pode chocar um espírito mais sofisticado. Nossas desculpas por apresentá-la são precisamente sua simplicidade (ou falta de sofisticação) e o teorema de unicidade que provaremos logo a seguir, o qual mostra que um produto exterior qualquer é tão bom como qualquer outro. Nesse ínterim, vejamos um exemplo mais intrínseco.

Segunda construção de $\overset{r}{\wedge} E$. Definamos uma aplicação r linear alternada $\varphi\colon E \times \cdots \times E \to [\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})]^*$ estipulando que, para quaisquer $v_1,\ldots,v_r \in E$, $\varphi(v_1,\ldots,v_r)$ seja o funcional linear sobre $\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ tal que, para todo $f \in \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, $[\varphi(v_1,\ldots,v_r)] \cdot f = f(v_1,\ldots,v_r)$. Se $\dim E = m$ então $\dim \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}) = \binom{m}{r}$. Logo, para verificar a condição 3) da Proposição 1, é suficiente mostrar que, para qualquer base ordenada $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_m)$ em E, as imagens $\varphi(e_{j_1},\ldots,e_{j_r})$ com $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m$ são linearmente independentes. Ora, se tivermos uma relação de dependência $\sum_J \xi^J \cdot \varphi(e_{j_1},\ldots,e_{j_r}) = 0$ então, para cada $f \in \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, teremos $\sum_J \xi^J \cdot f(e_{j_1},\ldots,e_{j_r}) = 0$, de acordo com a definição de φ. Tomando, em particular, $f = e^J$, resulta $\xi^J = 0$ para cada J, o que conclui a verificação.

Terceira construção: $\overset{r}{\wedge} E^*$. Quando partimos de um espaço E^* de formas lineares, a Proposição 3 do Capítulo 3 nos fornece um produto exterior natural $\varphi\colon E^* \times \cdots \times E^* \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, onde, para $f^1,\ldots,f^r \in E^*$, $\varphi(f^1,\ldots,f^r)$ é a anti-simetrizada do produto tensorial $f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r$. Voltaremos a este importante exemplo no capítulo seguinte.

Agora que sabemos da existência de produto exterior em todo espaço vetorial, estabeleceremos algumas conseqüências simples deste fato.

Primeiro calculemos as coordendas de um r-vetor decomponível. Seja $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge} E$ um produto exterior. Dada uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_m)$ em E, $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$ indica os elementos da base correspondente em $\overset{r}{\wedge} E$. Exprimamos os vetores $v_1 = \sum_i \alpha_1^i e_i, \ldots, v_r =$

$\sum_i \alpha_r^i e_i$ em termos da base $\mathcal{E}$. O Corolário da Proposição 4, Capítulo 4 nos dá a expressão de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ em termos da base (e_J):

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = \sum_J \det(\alpha^J) \cdot e_J.$$

O somatório acima se estende a todos os subconjuntos $J \subset I_m$ com r elementos; α é a matriz $m \times r$ das coordenadas dos v_j na base $\mathcal{E}$ e α^J é a submatriz $r \times r$ cujas linhas têm índices no conjunto J. Em particular, quando $r = m = \dim E$, temos

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = \det(\alpha) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$$
$$\det_{\mathcal{E}}[v_1, \ldots, v_m] \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_m.$$

Proposição 2. *Seja* $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge} E$ *um produto exterior. Os vetores* $v_1, \ldots, v_r \in E$ *são linearmente independentes se, e somente se,* $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \neq 0$.

Demonstração: Se $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \neq 0$ então $v_1, \ldots, v_r$ são linearmente independentes pela Proposição 1, Capítulo 3. Reciprocamente, se $v_1, \ldots, v_r$ são linearmente independentes então existe uma base ordenada $\mathcal{E}$ em E da qual eles são os r primeiros elementos. Logo $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ é $\neq 0$ como elemento da base correspondente em $\overset{r}{\wedge} E$. □

Seja $\alpha = (\alpha_j^i)$ uma matriz $m \times n$. Dados os subconjuntos $I \subset I_m$ e $J \subset I_n$, usaremos a notação α_J^I para representar a submatriz de α formada pelos elementos α_j^i tais que $i \in I$ e $j \in J$. Escreveremos (como antes) simplesmente α^I quando $J = I_n$ e α_J quando $I = I_m$. Quando I e J possuem o mesmo número de elementos, α_J^I é uma matriz quadrada e $\det(\alpha_J^I)$ é chamado o *determinante menor* de α relativo às linhas I e às colunas J.

Aplicação. Seja $\alpha = (\alpha_j^i)$ uma matriz $m \times n$. Diz-se que α tem *posto* r (por colunas) quando r é o número máximo de vetores-coluna de α que são linearmente independentes. Isto significa que r é o maior inteiro tal que existe um subconjunto $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\} \subset I_n$, contendo r elementos, com $\alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_r} \neq 0$. Ora, sabemos que

$$\alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_r} = \sum_I \det(\alpha_J^I) \cdot e_I,$$

a soma estendendo-se a todos os subconjuntos $I = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subset I_m$. Aqui, como sempre, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$. Neste caso, $(e_1, \ldots, e_m)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Como os r-vetores e_I formam uma base de $\overset{r}{\wedge}\mathbb{R}^m$, vemos que o posto de α (por colunas) é r se, e somente se, r é o maior inteiro para o qual existe um determinante menor $r \times r$ da matriz α que é $\neq 0$. Segue-se da Proposição 4, Capítulo 4, que o posto de α (por colunas) é igual ao posto da matriz transposta ${}^t\alpha$. Logo o posto de α é o mesmo, quer consideremos linhas ou colunas em sua definição.

Unicidade do produto exterior. Agora mostraremos que as várias construções de produtos exteriores que possam ser imaginadas estão ligadas umas às outras por isomorfismos canônicos, de modo que podem ser consideradas como uma só. Começaremos com uma propriedade fundamental do produto exterior.

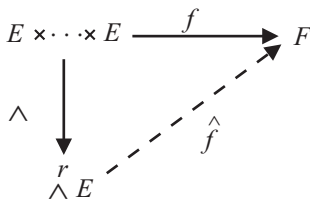
Proposição 3. *Seja* $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge}E$ *um produto exterior. Para toda aplicação* r*-linear alternada* $f\colon E \times \cdots \times E \to F$*, existe uma única aplicação linear* $\hat{f}\colon \overset{r}{\wedge} E \to F$ *tal que* $\hat{f} \circ \wedge = f$*, isto é,*

$$f(v_1, \ldots, v_r) = \hat{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_r \in E$.

Em termos menos precisos, porém mais sugestivos: toda função r-linear alternada $f(v_1, \ldots, v_r)$ dos vetores $v_1, \ldots, v_r \in E$ é uma função linear $\hat{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$ do seu produto exterior.

Demonstração: Escolhamos uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E. Dada $f\colon E \times \cdots \times E \to F$ r-linear alternada, definamos uma aplicação linear $\hat{f}\colon \overset{r}{\wedge} E \to F$ pondo $\hat{f}(e_J) = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ para todo $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ onde $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$. Como f é alternada, vemos que $\hat{f} \circ \wedge$ coincide com f em todas as seqüências $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ de elementos básicos. Segue-se que $\hat{f} \circ \wedge = f$. (Cfr. Proposição 2, Capítulo 2.) A unicidade de $\hat{f}$ resulta do fato de que seus valores estão estipulados nos r-vetores básicos e estes geram $\overset{r}{\wedge}E$. $\square$

O diagrama a seguir ilustra a Proposição 3.

Corolário 1. (Unicidade do produto exterior.) *Sejam* $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge} E$ *e* $\cap\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\cap} E$ *produtos exteriores (de mesma ordem* r*) em* E*. Existe um único isomorfismo* $\xi\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\cap} E$ *tal que* $\xi \circ \wedge = \cap$*. Isto é,* $\xi(v_1, \wedge \cdots, \wedge v_r) = v_1 \cap \cdots \cap v_r$ *para quaisquer* $v_1, \ldots, v_r \in E$

Com efeito, considerando $\wedge$ como um produto exterior e $\cap$ apenas como uma aplicação r-linear alternada, a Proposição 3 fornece uma aplicação linear $\xi\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\cap} E$ tal que $\xi \circ \wedge = \cap$. Trocando os papéis de $\wedge$ e $\cap$, obtemos uma aplicação linear $\eta\colon \overset{r}{\cap} E \to \overset{r}{\wedge} E$ tal que $\eta \circ \cap = \wedge$. Sejam quais forem $v_1, \ldots, v_r \in E$ temos então $(\eta \circ \xi)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \eta(v_1 \cap \cdots \cap v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, de modo que $\eta \circ \xi\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge} E$ coincide com a aplicação identidade. Analogamente, $\xi \circ \eta =$ identidade, de modo que ξ é um isomorfismo e $\eta = \xi^{-1}$.

Corolário 2. *A correspondência* $f \mapsto \hat{f}$*, estabelecida na Proposição 3, fornece um isomorfismo canônico* $\mathfrak{A}_r(E; F) \approx \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge} E; F)$.

Demonstração imediata.

Observações: 1) O fato de que $\overset{r}{\wedge} E$ e $\overset{r}{\cap} E$ são isomorfos não tem a menor importância pois sabemos desde o começo que estes espaços vetoriais têm a mesma dimensão. O interesse do Corolário 1 acima reside na existência de um (único) isomorfismo $\xi\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\cap} E$ tal que

$$\xi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = v_1 \cap \cdots \cap v_r.$$

É esta relação que exprime a unicidade do produto exterior.

Em virtude da unicidade, diremos de agora em diante "*o* produto exterior" em vez de "*um* produto exterior".

Evidentemente $\overset{r}{\wedge} E = \{0\}$ quando $r > \dim E$. Por conveniência, poremos $\overset{0}{\wedge} E = \mathbb{R}$ e $\overset{1}{\wedge} E = E$.

2) Sem a Proposição 3 é praticamente impossível definir uma aplicação linear $T\colon \overset{r}{\wedge} E \to F$ cujo domínio é uma potência exterior. A razão é a seguinte: todo r-vetor $x \in \overset{r}{\wedge} E$ é soma de elementos decomponíveis mas não de modo único. A Proposição 3 diz que para definir T basta dar seu valor $T \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$ nos elementos decomponíveis, de tal modo que $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto T \cdot (v_1, \wedge \cdots \wedge v_r)$ seja r-linear. Feito isso, *é desnecessário* verificar que T é bem definida ou que pode ser estendida coerentemente a todos os r-vetores. Tudo isto é automático, de acordo com a Proposição 3.

Para finalizar este capítulo, mencionaremos um fato que será utilizado repetidas vezes a seguir. Trata-se do seguinte: se $F \subset E$ é um subespaço vetorial então, para todo inteiro r, podemos considerar a potência exterior $\overset{r}{\wedge} E$ como subespaço vetorial de $\overset{r}{\wedge} E$.

Mais precisamente, o subespaço $S \subset \overset{r}{\wedge} E$ gerado pelos r-vetores da forma $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, onde $v_1, \ldots, v_r \in F$, e a restrição de $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge} E$ a $F \times \cdots \times F$ determinam uma aplicação r-linear alternada $\varphi\colon F \times \cdots \times F \to S$. Afirmamos que φ é um produto exterior.

Com efeito, seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de F, a qual estendemos até obter uma base ordenada $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_m)$ de E. Então os r-vetores $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$, onde $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_n$, geram S e portanto constituem uma base de S. Isto prova que φ é um produto exterior. Escreveremos então $S = \overset{r}{\wedge} F$.

De agora em diante, sempre que tivermos um subespaço vetorial $F \subset E$, admitiremos sem mais comentários que $\overset{r}{\wedge} F \subset \overset{r}{\wedge} E$, sendo $\overset{r}{\wedge} F$ gerado pelos r-vetores $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, onde $v_1, \ldots, v_r \in F$.

Exercícios

1. Considere o produto vetorial $\times\colon \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{m-1} \to \mathbb{R}^m$ (vide Exemplo 1). Prove que $w = v_1 \times \cdots \times v_{m-1}$ é sempre ortogonal a $v_1, \ldots, v_{m-1}$. Deduza daí que qualquer $w \in \mathbb{R}^m$ é da forma $w = v_1 \times \cdots \times v_{m-1}$. Conclua que se $\dim E = m$ então todo $(m-1)$-vetor $x \in \overset{m-1}{\wedge} E$ é decomponível.

2. Seja (e^1, e^2, e^3, e^4) a base canônica em $(\mathbb{R}^4)^*$. Prove que o bivetor

$e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \overset{2}{\wedge}(\mathbb{R}^4)^*$ não é decomponível. (*Sugestão*: Considere $\overset{2}{\wedge}(\mathbb{R}^4)^* = \mathfrak{A}_2(\mathbb{R}^4;\mathbb{R})$ e observe que, dados $f, g \in (\mathbb{R}^4)^*$, $f \wedge g$ é a forma bilinear alternada em $\mathbb{R}^4$ tal que $(f \wedge g)(u,v) = f(u)\cdot g(v) - f(v)\cdot g(u)$, conforme a "terceira construção".)

3. Prove que uma aplicação r-linear alternada $\varphi\colon E \times \cdots \times E \to F$ é um produto exterior se, e somente se, cumpre a condição de universalidade enunciada na Proposição 3.

4. Dado um produto exterior $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge} E$, sejam $v_1, \ldots, v_s \in E$ vetores linearmente independentes. Então os r-vetores $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_r}$, onde $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_s$ são linearmente independentes.

5. Para toda matriz (a^{ij}) do tipo $r \times r$ e toda seqüência de vetores $v_1, \ldots, v_r$ em E, tem-se

$$\sum_{i,j} a^{ij} v_i \wedge v_j = \sum_{i<j} (a^{ij} - a^{ji}) v_i \wedge v_j.$$

(No primeiro somatório, os índices i, j assumem, independentemente, todos os valores de 1 a r. No segundo, deve-se ter $1 \leq i < j \leq r$.)

6. Sejam $v_1, \ldots, v_r \in E$ linearmente independentes. Se os vetores $w_1, \ldots, w_r \in E$ são tais que $\sum_{j=1}^{r} v_j \wedge w_j = 0$, então, para cada $j \in I_r$, tem-se $w_j = \sum_{i=1}^{r} a_j^i v_i$, onde $a_j^i = a_i^j$ $(i, j \in I_r)$.

[*Sugestão*: Complete os v_j de modo a obter uma base $(v_1, \ldots, v_r, x_1, \ldots, x_{m-r})$ de E. Exprima os w_j em termos dessa base e substitua na relação dada. Use o exercício anterior e o fato de que os bivetores $v_i \wedge v_j$ $(i < j)$ e $v_i \wedge x_k$ são linearmente independentes.]

7. Sejam S, T subespaços vetoriais de E. Considerando $\overset{r}{\wedge} S$, $\overset{r}{\wedge} T$ e $\overset{r}{\wedge}(S \cap T)$ como os subespaços de $\overset{r}{\wedge} E$, prove que $\overset{r}{\wedge}(S \cap T) = (\overset{r}{\wedge} S) \cap (\overset{r}{\wedge} T)$. Generalize: dada uma família qualquer de subespaços $S_\lambda \subset E$ então $\overset{r}{\wedge}(\cap S_\lambda) = \cap(\overset{r}{\wedge} S_\lambda)$. Conclua que, tomado um r-vetor $z \in \overset{r}{\wedge} E$, existe um subespaço (único) $M_z \subset E$ mínimo tal que

$z \in \overset{r}{\wedge} M_z$. (Isto é, se $T \subset E$ é um subespaço tal que $z \in \overset{r}{\wedge} T$ então $M_z \subset T$.) A dimensão de M_z chama-se o *posto* do r-vetor z.

8. Seja $f\colon \overset{r-1}{\wedge} E \to \mathbb{R}$ uma forma linear sobre $\overset{r-1}{\wedge} E$. Se $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = 0$, prove que

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^i f(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_r) \cdot x_i = 0.$$

(O símbolo $\hat{x}_i$ significa: omitir a variável x_i.)

9. Sejam $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ e $y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_r$ r-vetores decomponíveis em $\overset{r}{\wedge} E$. Tem-se $x = y$ se, e somente se, existe uma matriz $r \times r$, $\alpha = (\alpha^i_j)$, tal que $y_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha^i_j x_i$ e $\det(\alpha^i_j) = 1$.

6

Formas Exteriores

As formas r-lineares alternadas sobre um espaço vetorial E são chamadas *formas exteriores de grau* r sobre E. A razão deste nome é uma interpretação bastante conveniente de $\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ como uma potência exterior $\overset{r}{\wedge}E^*$.

É um fato conhecido que certas construções com formas lineares são mais fáceis de definir do que suas análogas com vetores. Isto se deve à circunstância de que as operações (adição e multiplicação por escalar) num espaço vetorial abstrato E são admitidas axiomaticamente, enquanto que as operações no seu dual E^* são definidas explicitamente.

A interpretação de $\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ como $\overset{r}{\wedge}E^*$ é um caso particular do princípio filosófico acima enunciado.

São freqüêntes em Matemática situações em que se necessitam considerar apenas potências exteriores do tipo $\overset{r}{\wedge}E^*$, onde E^* é um espaço vetorial cujos elementos são formas lineares. (Exemplo: cohomologia de De Rham.) É útil portanto observar que a r-ésima potência exterior de um espaço dual possui uma descrição simples, como mostraremos agora.

Vimos no capítulo anterior, com base na Proposição 3, Capítulo 3, que a aplicação r-linear $\varphi\colon E^* \times \cdots \times E^* \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, definida por $\varphi(f^1,\ldots,f^r) = A\cdot(f^1\cdot f^2\cdot\ldots\cdot f^r)$, satisfaz os axiomas de um produto exterior. Assim, dadas as formas lineares $f^1,\ldots,f^r \in E^*$, indicaremos com $f^1\wedge f^2\wedge\cdots\wedge f^r$ a r-forma linear alternada obtida por anti-simetrização do produto tensorial $f^1\cdot f^2\cdot\ldots\cdot f^r$. A proposição abaixo mostra como a forma r-linear alternada $f^1\wedge f^2\wedge\cdots\wedge f^r$ opera sobre os vetores $v_1,\ldots,v_r \in \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$.

Proposição 1. *Dados* $v_1, \ldots, v_r \in E$ *e* $f^1, \ldots, f^r \in E^*$, *tem-se*

$$(f^1 \wedge f^2 \wedge \cdots \wedge f^r)(v_1, \ldots, v_r) = \det(f^i(v_j)),$$

onde $(f^i(v_j))$ *indica a matriz* $r \times r$ *cujo i-ésimo vetor linha é* $(f^i(v_1), \ldots, f^i(v_r))$.

Demonstração: Temos $f^1 \wedge f^2 \wedge \cdots \wedge f^r = A \cdot (f^1 \cdot f^2 \cdot \ldots \cdot f^r) = \sum\limits_{\sigma} \varepsilon_\sigma \cdot f^{\sigma(1)} \cdot f^{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot f^{\sigma(r)}$. Logo

$$\begin{aligned}
&(f^1 \wedge \cdots \wedge f^r)(v_1, \ldots, v_r) \\
&\quad = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma f^{\sigma(1)}(v_1) \cdot f^{\sigma(2)}(v_2) \cdot \ldots \cdot f^{\sigma(r)}(v_r) \\
&\quad = \det(f^i(v_j))
\end{aligned}$$

de acordo com a expressão clássica do determinante. □

Assim, dados os funcionais lineares $f^1, f^2, \ldots, f^r \in E^*$, seu produto exterior é a forma r-linear alternada $f^1 \wedge f^2 \wedge \cdots \wedge f^r$ sobre E tal que

$$(f^1 \wedge f^2 \wedge \cdots \wedge f^r)(v_1, \ldots, v_r) = \det(f^i(v_j)),$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_r \in E$. Isto nos leva à

Proposição 2. *Para todo espaço vetorial* E, *tem-se o isomorfismo canônico* $\overset{r}{\wedge} E^* \approx (\overset{r}{\wedge} E)^*$.

Demonstração: Basta comparar as extremidades da cadeia:

$$\overset{r}{\wedge} E^* = \mathfrak{A}_r(E; \mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge} E; \mathbb{R}) = (\overset{r}{\wedge} E)^*,$$

na qual o isomorfismo canônico do meio é fornecido pelo Corolário 2, Proposição 3, Capítulo 5. □

Interpretaremos o isomorfismo canônico $\overset{r}{\wedge} E^* \approx (\overset{r}{\wedge} E)^*$ do seguinte modo. Cada "r-vetor covariante" (elemento de $\overset{r}{\wedge} E^*$) age como funcional linear sobre $\overset{r}{\wedge} E$ de tal modo que o r-vetor decomponível $f^1 \wedge \cdots \wedge f^r \in \overset{r}{\wedge} E^*$ opera sobre $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \overset{r}{\wedge} E$ assim:

$$(f^1 \wedge f^2 \wedge \cdots \wedge f^r) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \det(f^i(v_j)). \qquad (*)$$

No caso geral, um elemento $g \in \overset{r}{\wedge} E^*$ é uma soma de r-vetores decomponíveis, $g = \Sigma g^i$, bem como cada $x \in \overset{r}{\wedge} E$ se escreve $x = \Sigma x_j$, com cada x_j decomponível, e $g(x) = \sum_{i,j} g^i(x_j)$. Basta, porém, saber como opera cada elemento decomponível de $\overset{r}{\wedge} E^*$ opera como funcional linear sobre um elemento decomponível de $\overset{r}{\wedge} E$. Isto se faz de acordo com a relação (*) acima.

Exercícios

1. Prove que, dada uma base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E, a base de $(\overset{r}{\wedge} E)^*$ constituida pelas r-formas $e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_r}$ é dual da base de $\overset{r}{\wedge} E$ cujos elementos são os r-vetores $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m$.
2. Sejam $f, f^1, \ldots, f^r \in E^*$ e $u_1, \ldots, u_{r+1} \in E$. Prove que

$$(f \wedge f^1 \wedge \cdots \wedge f^r)(u_1, \ldots, u_{r+1}) = \\ = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} f(u_i) \cdot g(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{r+1}),$$

onde $g = f^1 \wedge \cdots \wedge f^r$.

7

Aplicações Induzidas

Seja $T\colon E \to F$ uma transformação linear. Para cada inteiro positivo r, consideremos a aplicação $T_r\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r}{\wedge} F$, definida por $T_r(v_1, \ldots, v_r) = (T \cdot v_1) \wedge \cdots \wedge (T \cdot v_r)$.

Verifica-se facilmente que T_r é r-linear alternada. Segue-se então da Proposição 3, Capítulo 5, que existe uma única transformação linear

$$\overset{r}{\wedge} T\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge} F$$

tal que

$$(\overset{r}{\wedge} T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = T \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge T \cdot v_r$$

quaisquer que sejam $v_1, \ldots, v_r \in E$.

Diremos que $\overset{r}{\wedge} T\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge} F$ é a transformação linear *induzida* por T em $\overset{r}{\wedge} E$, ou ainda, que $\overset{r}{\wedge} T$ é a *r-ésima potência exterior* de T.

Evidentemente $\overset{r}{\wedge}(S \circ T) = (\overset{r}{\wedge} S) \circ (\overset{r}{\wedge} T)$ e $\overset{r}{\wedge}$ (identidade) = identidade. Segue-se que se T é um isomorfismo então $\overset{r}{\wedge} T$ é um isomorfismo, para todo r, valendo $(\overset{r}{\wedge} T)^{-1} = \overset{r}{\wedge}(T^{-1})$.

Agora obteremos a matriz de $\overset{r}{\wedge} T$ em termos da matriz de T. Dadas as bases ordenadas $(e_1, \ldots, e_m)$ em E e $(w_1, \ldots, w_n)$ em F, seja $\alpha = (\alpha_j^i)$ a matriz $n \times m$ de T em relação a estas bases. Isto significa que, para cada $j = 1, \ldots, m$, temos

$$T \cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i \cdot w_i.$$

As bases correspondentes para $\overset{r}{\wedge}E$ e $\overset{r}{\wedge}F$ consistem, respectivamente, dos r-vetores $e_K = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_r}$, $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_r\} \subset I_m$ e $w_J = w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_r}$, $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\} \subset I_n$. Para cada um desses subconjuntos K:

$$(\overset{r}{\wedge}T) \cdot e_K = T \cdot e_{k_1} \wedge T \cdot e_{k_2} \wedge \cdots \wedge T \cdot e_{k_r} = \sum_J \det(\alpha_K^J) w_J,$$

conforme resulta do Corolário da Proposição 5, Capítulo 4, ou do cálculo das coordenadas de um r-vetor, feito no Capítulo 5.

Vemos portanto que se $\alpha = (\alpha_j^i)$ é a matriz da transformação linear $T\colon E \to F$ relativamente às bases (e_i) em E e (w_j) em F, então a matriz da transformação linear induzida $\overset{r}{\wedge}T\colon \overset{r}{\wedge}E \to \overset{r}{\wedge}F$ relativamente às bases correspondentes em $\overset{r}{\wedge}E$ e $\overset{r}{\wedge}F$ é a matriz $\binom{n}{r} \times \binom{m}{r}$ cujos elementos são os determinantes $\det(\alpha_K^J)$, menores $r \times r$ da matriz α. Tal matriz chama-se a *r-ésima potência exterior da matriz* α e é representada pela notação $\overset{r}{\wedge}\alpha$.

Temos $\overset{r}{\wedge}\alpha = (A_K^J)$, onde $A_K^J = \det(\alpha_K^J)$. As linhas de $\overset{r}{\wedge}\alpha$ (em número de $\binom{n}{r}$) têm como índices os subconjuntos $J \subset I_n$ com r elementos, enquanto suas $\binom{m}{r}$ colunas têm como índices os subconjuntos $K \subset I_m$ com r elementos. Evidentemente, dadas as matrizes $\alpha \in M(n \times m)$ e $\beta \in M(p \times n)$, tem-se $\overset{r}{\wedge}(\beta \cdot \alpha) = (\overset{r}{\wedge}\beta) \cdot (\overset{r}{\wedge}\alpha)$. Além disso, $\overset{r}{\wedge}(I_{n \times m}) = I_{p \times q}$, onde $p = \binom{n}{r}$ e $q = \binom{m}{r}$. Segue-se que se $\alpha \in M(m \times m)$ é invertível, então, para cada inteiro r, $\overset{r}{\wedge}\alpha$ é invertível, sendo $(\overset{r}{\wedge}\alpha)^{-1} = \overset{r}{\wedge}(\alpha^{-1})$.

A forma da matriz de $\overset{r}{\wedge}T$ tem relação com o *posto* de uma transformação linear $T\colon E \to F$, o qual é definido como a dimensão da imagem $T(E)$, isto é, como o maior inteiro r tal que existem vetores $v_1, \ldots, v_r \in E$ com $T \cdot v_1, \ldots, T \cdot v_r$ linearmente independentes, ou seja, com $T \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge T \cdot v_r \neq 0$.

O posto de $T\colon E \to F$ pode portanto ser caracterizado como o maior inteiro r tal que a transformação linear induzida $\overset{r}{\wedge}T\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge}F$ é não-nula.

Ou ainda, o posto de T é o maior inteiro r tal que algum determinante menor $r \times r$ (digamos $\det(\alpha_K^J)$) de uma matriz α de T é não-nulo. Assim, o posto de T é igual ao posto de qualquer de suas matrizes.

Uma transformação linear $T\colon E \to F$ possui uma *adjunta* $T^*\colon F^* \to E^*$, definida por $(T^* \cdot f) \cdot v = f(T \cdot v)$ para todo funcional linear $f \in F^*$. Em outras palavras, dado $f \in F^*$, temos $T^* \cdot f = f \circ T$.

Para cada inteiro $r > 0$, a transformação adjunta $T^*\colon F^* \to E^*$ induz uma transformação linear

$$\overset{r}{\wedge}(T^*)\colon \overset{r}{\wedge} F^* \to \overset{r}{\wedge} E^*.$$

Ora, $\overset{r}{\wedge}F^* = \mathfrak{A}_r(F;\mathbb{R})$ e $\overset{r}{\wedge}E^* = \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$. Já definimos no Capítulo 4, uma transformação linear $T^{\#}\colon \mathfrak{A}_r(F;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, induzida por T, através da relação $(T^{\#} \cdot f)(v_1, \ldots, v_r) = f(T \cdot v_1, \ldots, T \cdot v_r)$, para quaisquer $f \in \mathfrak{A}_r(F;\mathbb{R})$, $v_1, \ldots, v_r \in E$.

Proposição 1. $\overset{r}{\wedge}(T^*) = T^{\#}$.

Demonstração: Basta provar que $\overset{r}{\wedge}(T^*) \cdot \omega = T^{\#} \cdot \omega$ para qualquer r-forma decomponível $\omega = f^1 \wedge \cdots \wedge f^r$. Para isso, tomemos vetores arbitrários $v_1, \ldots, v_r \in E$. Temos sucessivamente

$$\begin{aligned}
[(\overset{r}{\wedge}T^*) \cdot \omega](v_1, \ldots, v_r) &\overset{1}{=} (T^* \cdot f^1 \wedge \cdots \wedge T^* \cdot f^r)(v_1, \ldots, v_r) \\
&\overset{2}{=} \det[(T^* \cdot f^i) \cdot v_j] \overset{3}{=} \det[f^i(T \cdot v_j)] \\
&\overset{4}{=} (f^1 \wedge \cdots \wedge f^r)(T \cdot v_1, \ldots, T \cdot v_r) \\
&\overset{5}{=} \omega(T \cdot v_1, \ldots, T \cdot v_r) \overset{6}{=} (T^{\#} \cdot \omega)(v_1, \ldots, v_r).
\end{aligned}$$

A igualdade 1 é a definição de $\overset{r}{\wedge}T^*$. As igualdades 2 e 4 são a definição da forma r-linear alternada que é produto exterior de r formas lineares dadas. A igualdade 3 vem da definição da adjunta T^*. A igualdade 5 é meramente a definição de ω. Finalmente, a igualdade 6 é a definição de $T^{\#}$. □

Corolário. *O isomorfismo canônico* $\overset{r}{\wedge}E^* \approx (\overset{r}{\wedge}E)^*$ *identifica* $\overset{r}{\wedge}T^*\colon \overset{r}{\wedge}F^* \to \overset{r}{\wedge}E^*$ *com a adjunta* $(\overset{r}{\wedge}T)^*\colon (\overset{r}{\wedge}F)^* \to (\overset{r}{\wedge}E)^*$. *Mais precisamente, o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
\overset{r}{\wedge}F^* & \xrightarrow{\overset{r}{\wedge}T^*} & \overset{r}{\wedge}E^* \\
\approx\downarrow & & \downarrow\approx \\
(\overset{r}{\wedge}F)^* & \xrightarrow{(\overset{r}{\wedge}T)^*} & (\overset{r}{\wedge}E)^*
\end{array}$$

onde as setas verticais indicam os isomorfismos canônicos.

Com efeito, o isomorfismo canônico $\overset{r}{\wedge} F^* \approx (\overset{r}{\wedge} F)^*$ associa a cada forma exterior $\omega \in \overset{r}{\wedge} F^*$ o funcional linear $\widetilde{\widetilde{\omega}} \in (\overset{r}{\wedge} F)^*$ tal que $\widetilde{\widetilde{\omega}}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \omega(v_1, \ldots, v_r)$ sejam quais forem $v_1, \ldots, v_r \in F$. De modo análogo opera o isomorfismo canônico $\overset{r}{\wedge} E^* \approx (\overset{r}{\wedge} E)^*$. Ora, para $\omega \in \overset{r}{\wedge} F^*$ e $u_1, \ldots, u_r \in E$ arbitrários, a Proposição 1 agora demonstrada nos dá:

$$
\begin{aligned}
[(\overset{r}{\wedge} T^*) \cdot \omega]^{\approx} \cdot (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) &= [(\overset{r}{\wedge} T^*) \cdot \omega](u_1, \ldots, u_r) \\
&= (T^{\#} \cdot \omega)(u_1, \ldots, u_r) = \omega(T \cdot u_1, \ldots, T \cdot u_r) \\
&= \widetilde{\widetilde{\omega}}(T \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge T \cdot u_r) = \widetilde{\widetilde{\omega}}[(\overset{r}{\wedge} T)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)] \\
&= [(\overset{r}{\wedge} T)^* \cdot \widetilde{\widetilde{\omega}}](u_1 \wedge \cdots \wedge u_r).
\end{aligned}
$$

Logo $[(\overset{r}{\wedge} T^*) \cdot \omega]^{\approx} = (\overset{r}{\wedge} T)^* \cdot \widetilde{\widetilde{\omega}}$.

Exercícios

1. Seja $m = \dim E$. Dado o endomorfismo linear $T \colon E \to E$, prove que $\overset{m}{\wedge} T \colon \overset{m}{\wedge} E \to \overset{m}{\wedge} E$ é dado por $(\overset{m}{\wedge} T) \cdot x = \det(T) \cdot x$ para todo $x \in \overset{m}{\wedge} E$.

2. Seja $T \colon E \to F$ uma transformação linear de posto p. Prove que, para todo $r \leq p$, o posto de $\overset{r}{\wedge} T \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge} F$ é $\binom{p}{r}$.

8

A Álgebra de Grassmann

Desejamos definir o produto de um r-vetor sobre E por um s-vetor sobre E, dando como resultado um $(r+s)$-vetor sobre E. Isto significa definir uma aplicação bilinear

$$(\overset{r}{\wedge}E) \times (\overset{s}{\wedge}E) \to \overset{r+s}{\wedge} E.$$

Seja $\mathfrak{A}_{r,s}(E;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_{r+s}(E;F)$ que consiste nas aplicações $(r+s)$-lineares de E em F que são alternadas separadamente nas primeiras r e nas últimas s variáveis. O isomorfismo canônico $\mathcal{L}_r(E;\mathcal{L}_s(E;F)) \approx \mathcal{L}_{r+s}(E;F)$, introduzido na Proposição 1, Capítulo 2, induz, por restrição, um isomorfismo $\mathfrak{A}_r(E;\mathfrak{A}_s(E;F)) \approx \mathfrak{A}_{r,s}(E;F)$, como se verifica sem dificuldade. Segue-se então daquela proposição, juntamente com o Corolário 2 da Proposição 3, Capítulo 5, que se tem a seqüência de isomorfismos canônicos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\overset{r}{\wedge}E, \overset{s}{\wedge}E; F) \approx \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge}E; \mathcal{L}(\overset{s}{\wedge}E; F)) &\approx \mathfrak{A}_r(E;\mathfrak{A}_s(E;F)) \\ &\approx \mathfrak{A}_{r,s}(E;F).\end{aligned}$$

Tomando os extremos desta cadeia, obtemos:

$$\mathcal{L}(\overset{r}{\wedge}E, \overset{s}{\wedge}E; F) \approx \mathfrak{A}_{r,s}(E;F).$$

Este isomorfismo significa que dar uma aplicação bilinear

$$\hat{f} \colon (\overset{r}{\wedge}E) \times (\overset{s}{\wedge}E) \to F$$

é o mesmo que dar uma aplicação $(r+s)$-linear $f\colon E \times \cdots \times E \to F$ que seja alternada separadamente em relação às r primeiras e às s últimas variáveis. As aplicações f e $\hat{f}$ estão ligadas pela relação $\hat{f}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = f(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$.

Por conseguinte, se considerarmos a aplicação $(r+s)$-linear $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{r+s}{\wedge} E$, que é alternada mesmo no sentido absoluto, concluiremos que existe uma, e uma só, aplicação bilinear

$$\varphi\colon (\overset{r}{\wedge} E) \times (\overset{s}{\wedge} E) \to \overset{r+s}{\wedge} E,$$

tal que $\varphi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_s) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s$ para quaisquer $u_1, \ldots, v_s \in E$.

Dados $x \in \overset{r}{\wedge} E$ e $y \in \overset{s}{\wedge} E$, escreveremos simplesmente $x \wedge y \in \overset{r+s}{\wedge} E$ em vez de $\varphi(x, y)$. O $(r+s)$-vetor $x \wedge y$ será chamado o *produto exterior do r-vetor x pelo s-vetor y*. Escreveremos também $\wedge$ em vez de φ.

Enfatizamos que o produto exterior $\wedge\colon (\overset{r}{\wedge} E) \times (\overset{s}{\wedge} E) \to \overset{r+s}{\wedge} E$ é a única aplicação bilinear que, para elementos decomponíveis, cumpre:

$$(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_s) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s.$$

Nem sempre $\wedge\colon (\overset{r}{\wedge} E) \times (\overset{s}{\wedge} E) \to \overset{r+s}{\wedge} E$ é alternada. Isto se dá quando, e somente quando, ambos os números r, s são ímpares. É o que se depreende da proposição abaixo.

Proposição 1. *O produto exterior $\wedge\colon (\overset{r}{\wedge} E) \times (\overset{s}{\wedge} E) \to \overset{r+s}{\wedge} E$ goza das seguintes propriedades:*

1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, *para quaisquer* $x \in \overset{r}{\wedge} E$, $y \in \overset{s}{\wedge} E$, $z \in \overset{t}{\wedge} E$.

2) *Se* $x \in \overset{r}{\wedge} E$ *e* $y \in \overset{s}{\wedge} E$ *então* $x \wedge y = (-1)^{rs} y \wedge x$.

3) $(x + x') \wedge y = x \wedge y + x' \wedge y$, *para quaisquer* $x, x' \in \overset{r}{\wedge} E$, $y \in \overset{s}{\wedge} E$.

4) $(\alpha x) \wedge y = x \wedge (\alpha y) = \alpha \cdot (x \wedge y)$, *para todos* $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \overset{r}{\wedge} E$, $y \in \overset{s}{\wedge} E$.

Demonstração: Como todo multivetor é soma de elementos decomponíveis, basta demonstrar as relações acima no caso em que $x = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$, $x' = u'_1 \wedge \cdots \wedge u'_r$, $y = v_1 \wedge \cdots \wedge v_s$ e $z = w_1 \wedge \cdots \wedge w_t$. Neste caso, ambos os membros de 1) são iguais a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_t$. Quanto a 2), quando $u, v \in E$, temos $u \wedge v = -v \wedge u$. Segue-se que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s = (-1)^{rs} v_1 \wedge \cdots \wedge v_s \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ porque são necessárias s mudanças de sinal para colocar cada um dos r vetores u_i no seu lugar próprio, na frente dos v_j, começando com u_1, depois u_2, etc. Finalmente, as relações 3) e 4) exprimem apenas a bilinearidade da multiplicação $\wedge$: $(\overset{r}{\wedge} E) \times (\overset{s}{\wedge} E) \to \overset{r+s}{\wedge} E$. $\square$

Consideraremos a soma direta de espaços vetoriais

$$\wedge E = \mathbb{R} \oplus E \oplus \overset{2}{\wedge} E \oplus \cdots \oplus \overset{m}{\wedge} E,$$

onde $m = \dim E$. A dimensão de $\wedge E$ é igual a $\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{m}{i}$, ou seja, 2^m. Cada elemento $z \in \wedge E$ pode ser escrito, de modo único, como soma

$$z = z_0 + z_1 + \cdots + z_m, \quad z_r \in \overset{r}{\wedge} E, \quad r = 0, 1, \ldots, m.$$

Recordemos que $\overset{0}{\wedge} E = \mathbb{R}$ e $\overset{1}{\wedge} E = E$, de modo que z_0 é um escalar e z_1 é um vetor em E. Os elementos $z_r \in \overset{r}{\wedge} E$ tais que $z = \Sigma z_r$ são chamados as *componentes homogêneas* de z. O número r é o *grau* de $z_r \in \overset{r}{\wedge} E$.

Definiremos uma multiplicação em $\wedge E$, isto é, uma aplicação bilinear $\wedge E \times \wedge E \to \wedge E$, pondo, para $z = \Sigma z_r$ e $w = \Sigma w_r$, $z_r, w_r \in \overset{r}{\wedge} E$,

$$\begin{aligned} z \wedge w &= (z_0 + z_1 + \cdots + z_m) \wedge (w_0 + w_1 + \cdots + w_m) \\ &= z_0 w_0 + (z_0 w_1 + z_1 w_0) + (z_0 w_2 + z_1 w_1 + z_2 w_0) + \ldots \\ &= \sum_{r=0}^{m} \left(\sum_{i+j=r} z_i \cdot w_j \right) \end{aligned}$$

onde, por simplicidade, escrevemos $z_i w_j$ em vez de $z_i \wedge w_j$.

Evidentemente, na definição do produto $z \wedge w$, o que fizemos foi impor a propriedade distributiva, dispensando de escrever os produtos $z_i \wedge w_j$ com $i + j > m$ pois estes são iguais a zero. Notamos, além disso, que se $z_0 \in \overset{0}{\wedge} E$ é um escalar, então, para todo $z_r \in \overset{r}{\wedge} E$, $z_0 \wedge z_r$ é, por definição, meramente o produto usual de um escalar por um vetor.

Esta multiplicação torna $\wedge E$ uma álgebra associativa com elemento unidade (a saber, $1 \in \overset{0}{\wedge} E = \mathbb{R}$), chamada a *Álgebra de Grassmann* do espaço vetorial E.

A álgebra de Grassmann $\wedge E$ é uma álgebra *graduada*, ou seja, é soma direta de componentes homogêneas $\overset{r}{\wedge} E$ tais que $(\overset{r}{\wedge} E) \cdot (\overset{s}{\wedge} E) \subset \overset{r+s}{\wedge} E$. Além disso, ela é uma álgebra graduada *anti-comutativa*, isto é, $x \wedge y = (-1)^{rs} y \wedge x$ quando $x \in \overset{r}{\wedge} E$ e $y \in \overset{s}{\wedge} E$ são elementos homogêneos de graus r e s respectivamente.

Uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E determina uma base em $\wedge E$, formada pelos elementos $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$ onde $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ percorre *todos* os subconjuntos de I_m. Quando $J = \emptyset$ (vazio), poremos $e_J = 1$. Assim a dimensão de $\wedge E$ é o número de subconjuntos de I_m e, novamente, constatamos que $\dim(\wedge E) = 2^m$.

A álgebra de Grassmann $\wedge E$ é gerada por $\{1\}$ e E, goza da propriedade de ser $v \wedge v = 0$ para todo $v \in E$ e sua multiplicação não satisfaz nenhuma relação salvo as que decorrem desta. Ou seja, $\wedge E$ é a *álgebra livre associativa e anti-comutativa*, gerada por $\{1\}$ e E. Esta afirmação significa que a proposição abaixo é verdadeira.

Proposição 2. *Sejam E um espaço vetorial e A uma álgebra associativa com unidade 1. Seja $f \colon E \to A$ uma transformação linear tal que $f(u) \cdot f(u) = 0$ para todo vetor $u \in E$. Então existe um único homomorfismo (de álgebras) $F \colon \wedge E \to A$, tal que $F(1) = 1$ e $F(u) = f(u)$ para todo $u \in E$.*

Demonstração: Para cada inteiro $r > 0$, seja $f_r \colon E \times \cdots \times E \to A$ a aplicação r-linear definida por $f_r(u_1, \ldots, u_r) = f(u_1) \cdot f(u_2) \cdot \ldots \cdot f(u_r)$. Em virtude da relação $f(u) \cdot f(u) = 0$, cada f_r é alternada. (Vide Exercício 11, Capítulo 3.) Logo, para cada $r > 0$, existe uma única aplicação linear $\hat{f}_r \colon \overset{r}{\wedge} E \to A$ tal que

$$\hat{f}_r(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = f(u_1) \cdot f(u_2) \cdot \ldots \cdot f(u_r).$$

Seja também $\hat{f}_0 \colon \mathbb{R} \to A$ dada por $\hat{f}_0(\lambda) = \lambda \cdot 1 \in A$. Definamos agora $F \colon \wedge E \to A$ pondo

$$F(z_0 + z_1 + \cdots + z_m) = \hat{f}_0(z_0) + \hat{f}_1(z_1) + \cdots + \hat{f}_m(z_m).$$

Verifica-se imediatamente que F é um homomorfismo da álgebra $\wedge E$ na álgebra A, que leva 1 em 1 e coincide com f em $E = \overset{0}{\wedge} E$. A unicidade de F nestas condição é óbvia pois $\wedge E$ é gerada por $\{1\}$ e E. $\square$

Corolário. *Seja* $T\colon E \to F$ *uma transformação linear. Existe um único homomorfismo de álgebras* $\wedge T\colon \wedge E \to \wedge F$ *tal que* $(\wedge T)\cdot v = T\cdot v$ *para todo* $v \in E$*. Em cada componente homogênea* $\overset{r}{\wedge} E$*,* $\wedge T$ *coincide com a transformação linear induzida* $\overset{r}{\wedge} T\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge} F$*. Finalmente, dadas* $T\colon E \to F$*,* $S\colon F \to G$*, tem-se* $\wedge(S\circ T) = (\wedge S)\circ(\wedge T)$*.*

Observação: Chamamos a atenção mais uma vez para o fato de que, em $\wedge E$, tem-se $z \wedge z = 0$ sempre que z for decomponível (de grau > 0) ou quando for soma de componentes todas de grau ímpar. Fora desses casos, não se pode assegurar que $z \wedge z = 0$. Por exemplo, se e_1, e_2, e_3 e e_4 são elementos de uma base de E, então, pondo $z = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$, tem-se $z \wedge z = 2 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. (Em particular, concluímos que z não é decomponível.)

Examinaremos agora a correspondência entre r-vetores decomponíveis em E e os subespaços vetoriais de dimensão r em E.

Proposição 3. a) *Seja* $(u_1, \dots, u_r)$ *uma base ordenada do subespaço vetorial* $S \subset E$*. Pondo* $z = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$*, tem-se* $S = \{v \in E;\ v \wedge z = 0\}$*.*

b) *A fim de que duas seqüências* $(u_1, \dots, u_r)$ *e* $(v_1, \dots, v_r)$ *de vetores linearmente independentes em* E *gerem o mesmo subespaço* $S \subset E$ *é necessário e suficiente que se tenha* $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = \lambda \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$

Demonstração: a) Temos $v \wedge z = v \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$. Logo $v \wedge z = 0$ se, e somente se, os vetores $v, u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes. Como os u_i são independentes, temos $v \wedge z = 0$ se, e somente se, v é combinação linear dos u_i. Em outras palavras, $v \wedge z = 0 \Leftrightarrow v \in S$.

b) Seja $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = \lambda \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$. Então necessariamente $\lambda \neq 0$. (Vide Proposição 2, Capítulo 5.)

Logo $v \wedge (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = 0 \Leftrightarrow v \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = 0$, para todo $v \in E$. Portanto $(u_1, \dots, u_r)$ e $(v_1, \dots, v_r)$ geram o mesmo subespaço vetorial $S \subset E$, de acordo com o item a). Reciprocamente, se $(u_1, \dots, u_r)$ e $(v_1, \dots, v_r)$ geram o mesmo subespaço (r-dimensional) $S \subset E$ então, sendo $\dim \overset{r}{\wedge} S = 1$, e tendo-se $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \in \overset{r}{\wedge} S$, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \overset{r}{\wedge} S$, segue-se que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = \lambda \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. (Vide observação final do Capítulo 5.) $\square$

A cada r-vetor decomponível não-nulo $z = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \in \overset{r}{\wedge} E$ associaremos o subespaço r-dimensional $S_z \subset E$, gerado pelos vetores

$u_1, \ldots, u_r$. A correspondência $z \mapsto S_z$ é bem definida porque o subespaço S é formado pelos vetores $v \in E$ tais que $v \wedge z = 0$, portanto não depende da maneira de exprimir z como produto exterior de r-vetores.

Além disso, dados os r-vetores decomponíveis não-nulos $z, w \in \overset{r}{\wedge} E$, temos $S_z = S_w \Leftrightarrow z = \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Assim, dado um espaço vetorial E, existe uma correspondência biunívoca entre subespaços vetoriais de dimensão r em E e classes de r-vetores decomponíveis não-nulos, dois r-vetores decomponíveis $z, w \in \overset{r}{\wedge} E$ estando na mesma classe se, e somente se $z = \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

A correspondência $z \mapsto S_z$ goza das propriedades estabelecidas na proposição seguinte.

Proposição 4. *Sejam $w = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ e $z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_s$ elementos decomponíveis não-nulos em $\wedge E$. Tem-se*

a) $S_w \subset S_z \Leftrightarrow z = y \wedge w$, $y \in \overset{s-r}{\wedge} E$.
b) $S_w \cap S_z = \{0\} \Leftrightarrow w \wedge z \neq 0$.
c) *Se* $w \wedge z \neq 0$ *então* $S_{w \wedge z} = S_w \oplus S_z$.

Demonstração: a) Se $S_w \subset S_z$ então existe uma base $(y_1, \ldots, y_{s-r}, x_1, \ldots, x_r)$ em S_z tal que $(x_1, \ldots, x_r)$ é uma base de S_w. Logo $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = \lambda \cdot w$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} z &= \mu y_1 \wedge \cdots \wedge y_{s-r} \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \\ &= (\mu y_1 \wedge \cdots \wedge y_{s-r}) \wedge (\lambda w) \\ &= (\lambda \mu y_1 \wedge \cdots \wedge y_{s-r}) \wedge w = y \wedge w, \end{aligned}$$

onde pomos $y = \lambda \mu y_1 \wedge \cdots \wedge y_{s-r}$. Reciprocamente, se $z = y \wedge w$ então $v \wedge w = 0 \Rightarrow v \wedge z = (-1)^{s-r} y \wedge (v \wedge w) = 0$, logo $S_w \subset S_z$.

b) Temos $S_w \cap S_z = \{0\} \Leftrightarrow (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$ são linearmente independentes $\Leftrightarrow w \wedge z = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s \neq 0$.

c) Dado $v \in E$, temos $v \in S_{w \wedge z} \Leftrightarrow v \wedge (w \wedge z) = 0 \Leftrightarrow v$ é combinação linear de $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$. Por outro lado, sendo S_w gerado por $u_1, \ldots, u_r$ e S_z gerado por $v_1, \ldots, v_s$, temos $v \in S_w \oplus S_z \Leftrightarrow v$ é combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$. Assim $v \in S_{w \wedge z} \Leftrightarrow v \in S_w \oplus S_z$. □

Daremos agora duas aplicações da multiplicação de Grassmann. A primeira é uma dedução da regra de Cramer e a segunda é o desenvolvimento de Laplace de um determinante, o qual será, por sua vez,

aplicado a fim de obter uma expressão explícita do produto exterior de duas formas multilineares alternadas.

A regra de Cramer fornece uma expressão para a solução de um sistema de m equações lineares a m incognitas:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_m^1 x^m = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_m^2 x^m = b^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_m^m x^m = b^m. \end{cases}$$

Além de tomar o número de equações igual ao número de incógnitas, suporemos que a matriz $\alpha = (a_j^i)$ é invertível, isto é, suas colunas são linearmente independentes, ou seja, $\det(\alpha) \neq 0$. Introduzindo os vetores-coluna $a_1 = (a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^m), \ldots, a_m = (a_m^1, a_m^2, \ldots, a_m^m)$ e $b = (b^1, \ldots, b^m)$ em $\mathbb{R}^m$ vemos que resolver o sistema acima significa obter os números $x^1, \ldots, x^m$ tais que

$$x^1 a_1 + x^2 a_2 + \cdots + x^m a_m = b.$$

Como os vetores $a_1, \ldots, a_m$ constituem uma base de $\mathbb{R}^m$, os números x^i são as coordenadas do vetor b relativamente a essa base. Logo, a solução $(x^1, \ldots, x^m)$ existe e é única. O problema resolvido pela regra de Cramer é o de dar uma fórmula para tal solução.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, seja $\alpha[b; i]$ a matriz $m \times m$ obtida de α substituindo-se a coluna a_i por b. Temos:

Proposição 5. (Regra de Cramer.) *Para cada* $i = 1, \ldots, m$, *tem-se*:

$$x^i = \frac{\det(\alpha[b; i])}{\det(\alpha)}.$$

Demonstração: Para cada $i \in I_m$, multipliquemos a igualdade $\sum\limits_{j=1}^{m} x^j a_j = b$ exteriormente, à esquerda por $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1}$ e à direita por $a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_m$. (Se $i = 1$ não multipliquemos à esquerda; nem à direita quando for $i = m$.) Resulta:

$$\begin{aligned} & a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge (\Sigma x^j a_j) \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_m \\ & = a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_m \end{aligned}$$

ou seja

$$x^i \cdot (a_1 \wedge \cdots \wedge a_m) = a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_m.$$

Seja $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$. Temos:

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m = \det(\alpha) \cdot e$$

e

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_m = \det(\alpha[b; i]) \cdot e.$$

Concluímos que

$$x^i \cdot \det(\alpha) \cdot e = \det(\alpha[b; i]) \cdot e.$$

Como $e \in \overset{m}{\wedge} E$ é uma base, a Proposição 5 está demonstrada. □

Seja $\alpha = (a^i_j)$ uma matriz $m \times m$, cujos vetores-coluna indicaremos com $a_1, \ldots, a_m$. Fixemos um subconjunto $K = \{k_1 < \cdots < k_r\} \subset I_m$ com r elementos. Introduzamos a notação $K' = I_m - K$. O *desenvolvimento de Laplace* do determinante de α relativamente às linhas determinadas por K fornece uma expressão de $\det(\alpha)$ como soma dos produtos da forma $\pm \det(\alpha^J_K) \cdot \det(\alpha^{J'}_{K'})$, onde $J \subset I_m$ percorre todos os subconjuntos de I_m com r elementos e $J' = I_m - J$, conforme convencionamos.

Dado o subconjunto $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\} \subset I_m$, seja $J' = \{j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_{m-r}\}$ o seu complementar. Indicaremos com $\varepsilon(J)$ o sinal da permutação $(j_1, j_2, \ldots, j_r, j'_1, j'_2, \ldots, j'_{m-r})$, ou seja, $\varepsilon(J) = (-1)^p$, onde p é o número de pares (j, j') onde $j \in J$, $j' \in J'$ e $j' < j$. A regra de Laplace é a seguinte:

Proposição 6. *Seja α uma matriz $m \times m$. Fixado um subconjunto $K \subset I_m$, temos*

$$\det(\alpha) = \varepsilon(K) \cdot \sum_J \varepsilon(J) \det(\alpha^K_J) \cdot \det(\alpha^{K'}_{J'}),$$

onde a soma se estende a todos os subconjuntos $J \subset I_m$ com o mesmo número de elementos que K.

Demonstração: Seja $\mathbb{R}^K \subset \mathbb{R}^m$ o subespaço gerado pelos vetores e_k da base canônica de $\mathbb{R}^m$ tais que $k \in K$. Temos $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^K \oplus \mathbb{R}^{K'}$. Em particular, cada vetor coluna de α se escreve, de modo único, como

$a_i = b_i + c_i$, onde $b_i \in \mathbb{R}^K$ e $c_i \in \mathbb{R}^{K'}$. Seja $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$ o único elemento da base canônica de $\overset{m}{\wedge}\mathbb{R}^m$. Podemos escrever:

$$\det(\alpha) \cdot e = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m = (b_1 + c_1) \wedge (b_2 + c_2) \wedge \cdots \wedge (b_m + c_m).$$

O produto à direita se distribui numa soma de parcelas do tipo $d_1 \wedge \cdots \wedge d_m$ onde, para cada i, ou $d_i = b_i$ ou $d_i = c_i$. Seja r o número de elementos de conjunto K. Se uma dessas parcelas contiver mais de r fatores b_i, ela se anula, pois $\dim \mathbb{R}^K = r$. Pelo mesmo motivo, nenhuma parcela pode conter mais de $m - r$ fatores c_i. Logo, restam apenas as parcelas que são produtos de r fatores b_i e $m - r$ fatores c_i. Agrupando os fatores b_i no começo de cada produto, em ordem crescente dos índices e os fatores c_i no fim, também com os índices em ordem crescente, obteremos

$$\det(\alpha) \cdot e = \sum_J \varepsilon(J) b_{j_1} \wedge \cdots \wedge b_{j_r} \wedge c_{j'_1} \wedge \cdots \wedge c_{j'_{m-r}},$$

a soma estendendo-se a todos os subconjuntos $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ com r elementos, sendo $J' = \{J'_1 < \cdots < j'_{m-r}\}$. Escrevendo

$$e_K = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_r} \in \overset{r}{\wedge}\mathbb{R}^K, \quad e_{K'} = e_{k'_1} \wedge \cdots \wedge e_{k'_{m-r}} \in \overset{m-r}{\wedge}\mathbb{R}^{K'},$$

onde

$$K = \{k_1 < \cdots < k_r\} \quad \text{e} \quad K' = \{k'_1 < \cdots < k'_{m-r}\},$$

temos

$$b_{j_1} \wedge \cdots \wedge b_{j_r} = \det(\alpha_J^K) \cdot e_K, \quad c_{j'_1} \wedge \cdots \wedge c_{j'_{m-r}} = \det(\alpha_{J'}^{K'}) \cdot e_{K'}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\det(\alpha) \cdot e &= \sum_J \varepsilon(J) \det(\alpha_J^K) e_K \wedge \det(\alpha_{J'}^{K'}) \cdot e_{K'} \\ &= \sum_J \varepsilon(J) \det(\alpha_J^K) \cdot \det(\alpha_{J'}^{K'}) e_K \wedge e_{K'} \\ &= \varepsilon(K) \sum_J \varepsilon(J) \det(\alpha_J^K) \det(\alpha_{J'}^{K'}) \cdot e.\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de e, obtemos a fórmula de Laplace. □

Observação: O número $\varepsilon(K)\varepsilon(J)\det(\alpha_{J'}^{K'})$ chama-se o *complemento algébrico* do determinante menor $\det(\alpha_J^K)$. Assim, a Proposição 5 afirma

que, fixado um conjunto K_0 de linhas de α, (cujos índices estão em K) o determinante de α é a soma dos produtos de cada determinante menor extraido de K_0 pelo seu complemento algébrico. Evidentemente, uma fórmula análoga vale para *colunas* de α.

Corolário 1. (Desenvolvimento segundo os elementos de uma linha.) *Seja* $M_j^k = \det(\alpha_{\{j\}'}^{\{k\}'})$ = *menor obtido por omissão de k-ésima linha e da j-ésima coluna de α. Então*

$$\det(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{k+j} a_j^k M_j^k.$$

Isto é um caso particular da fórmula de Laplace, onde o conjunto K se reduz ao único elemento k. Neste caso, $\varepsilon(K) = (-1)^{k-1}$ e, para cada $J = \{j\} \subset I_m$, também $\varepsilon(J) = (-1)^{j-1}$. Logo $\varepsilon(K) \cdot \varepsilon(J) = (-1)^{k+j}$. Além disso, $\det(\alpha_J^K) = a_j^k$ e $\det(\alpha_{J'}^{K'}) = M_j^k$. Segue-se que

$$\det(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{k+j} a_j^k M_j^k.$$

Esta é a expressão do desenvolvimento de $\det(\alpha)$ segundo os elementos da k-ésima linha. Vale também a fórmula

$$\det(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+j} a_j^k M_j^k,$$

que fornece o desenvolvimento de $\det(\alpha)$ segundo os elementos da j-ésima coluna de α.

Corolário 2. *Seja* $\alpha = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *uma matriz $m \times m$, onde β é $r \times r$. 0 é a matriz nula $r \times (m-r)$, γ é $(m-r) \times r$ e δ é $(m-r) \times (m-r)$. Então* $\det(\alpha) = \det(\beta) \cdot \det(\delta)$.

Com efeito, considerando o desenvolvimento de Laplace de α em relação às suas primeiras r linhas, vemos que o único menor $r \times r$ extraido dessas linhas que não contém uma coluna de zeros é $\det(\beta)$, cujo complemento algébrico é $\det(\delta)$. (De fato, $\beta = \alpha_J^K$, com $K = J = \{1, \ldots, r\}$ e por conseguinte $\varepsilon(K) = \varepsilon(J) = (-1)^0 = 1$.) Logo, a fórmula de Laplace se reduz a $\det(\alpha) = \det(\beta) \cdot \det(\delta)$.

Examinemos agora a álgebra de Grassmann $\wedge E^*$. Fazendo uso da interpretação $\overset{r}{\wedge} E^* = \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$, a multiplicação de Grassmann nos fornece uma aplicação bilinear $\mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R}) \times \mathfrak{A}_s(E;\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_{r+s}(E;\mathbb{R})$. Como descrever explicitamente a forma $(r+s)$-linear alternada $f \wedge g$ em termos das formas f e g? A resposta é a seguinte:

Proposição 6. *Se $f \in \mathfrak{A}_r(E;\mathbb{R})$ e $g \in \mathfrak{A}_s(E;\mathbb{R})$ então $f \wedge g \in \mathfrak{A}_{r+s}(E;\mathbb{R})$ é dada por*

$$(f \wedge g)(u_1, \ldots, u_{r+s}) = \sum_J \varepsilon(J) f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_r}) \cdot g(u_{j'_1}, \ldots, u_{j'_s}),$$

onde $u_1, \ldots, u_{r+s} \in E$ são quaisquer, $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ percorre todos os subconjuntos de r elementos em I_{r+s} e $J' = \{j'_1 < \cdots < j'_s\} = I_{r+s} - J$.

Demonstração: Ambos os membros da igualdade proposta dependem bilinearmente de (f, g) e toda forma alternada é soma de formas decomponíveis. Logo, é suficiente demonstrar a igualdade quando $f = f^1 \wedge \cdots \wedge f^r$ e $g = f^{r+1} \wedge \cdots \wedge f^{r+s}$, onde as f^i são formas lineares. Neste caso, $(f \wedge g)(u_1, \ldots, u_{r+s})$ é igual ao determinante da matriz $\alpha = (f^i(u_j))$, que tem $r+s$ linhas e $r+s$ colunas. Consideremos o desenvolvimento da Laplace desse determinante em relação às suas primeiras r linhas, ou seja, fixemos $K = \{1, 2, \ldots, r\}$. Então $\varepsilon(K) = 1$ e, para cada $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$, $\det(\alpha_J^K) = \det(f^k(u_j)) = f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_r})$, enquanto $\det(\alpha_{J'}^{K'}) = g(u_{j'_1}, \ldots, u_{j'_r})$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(u_2, \ldots, u_{r+s}) &= \det(f^i(u_j)) \\ &= \sum_J \varepsilon(J) f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_r}) \cdot g(u_{j'_1}, \ldots, u_{j'_r}).\end{aligned}$$

□

Exercícios

1. Seja r ímpar. A aplicação bilinear $\wedge\colon (\overset{r}{\wedge} E) \times (\overset{r}{\wedge} E) \to \overset{2r}{\wedge} E$, definida por $\wedge(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, é alternada. Pergunta-se: é $\wedge$ um produto exterior? Justifique a resposta.

2. Seja $\mathcal{L}_\infty(E) = \mathbb{R} \oplus \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}_2(E;\mathbb{R}) \oplus \ldots$ Defina em $\mathcal{L}_\infty(E)$ uma estrutura de álgebra graduada associativa, por meio do produto tensorial. Com a notação do Exercício 4, Capítulo 3, seja $N_\infty(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} N_r(E)$. Prove que $N_\infty(E)$ é um ideal bilateral em $\mathcal{L}_\infty(E)$ e que a álgebra quociente $\mathcal{L}_\infty(E)/N_\infty(E)$ é isomorfa à Álgebra de Grassmann $\wedge(E^*)$.

3. Sejam $v_1, \ldots, v_r \in E$ linearmente independentes, onde $\dim E = m$. Prove que o conjunto $S = \{u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_r;\ u \in E\}$ é um subespaço vetorial de dimensão $m - r$ em $\overset{r+1}{\wedge} E$.

4. Dados $x \in \overset{r}{\wedge} E$ e $g \in \overset{r+s}{\wedge} E$, diremos que z é *divisível* por x quando existir $y \in \overset{s}{\wedge} E$ tal que $z = x \wedge y$. Prove que um $(r+1)$-vetor $z \in \overset{r+1}{\wedge} E$ é divisível por um vetor $v \in E$ se, e somente se, $v \wedge z = 0$.

5. Sejam $u_1, \ldots, u_r$ linearmente independentes. Prove que um $(r+s)$-vetor $z \in \overset{r+s}{\wedge} E$ é divisível pelo produto $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ se, e somente se, é divisível por cada um dos fatores $u_1, \ldots, u_r$.

6. O *posto* de um r-vetor $z \in \overset{r}{\wedge} E$ é a menor dimensão p de um subespaço $S \subset E$ tal que $z \in \overset{r}{\wedge} S$. O posto de um r-vetor $z \neq 0$ é $\geq r$. Tem-se posto de z igual a r se, e somente se, z é decomponível. (Vide também Exercício 7, Capítulo 5.)

7. Prove que nenhum r-vetor tem posto $r + 1$. (Vide Exercício 1, Capítulo 5.)

8. Dado $z = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_4 \in \overset{2}{\wedge} \mathbb{R}^4$, prove que se $z \wedge v = 0$ para algum $v \in \mathbb{R}^4$ então $v = 0$. Conclua que z tem posto 4.

9. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_{2r-1}, u_{2r}$ vetores linearmente independentes no espaço vetorial E. Pondo $z = u_1 \wedge u_2 + u_3 \wedge u_4 + \cdots + u_{2r-1} \wedge u_{2r}$, prove que $z^r = r! u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{2r}$ e conclua daí que o bivetor z tem posto $2r$. [Nota: $z^r = z \wedge z \wedge \cdots \wedge z$ (r fatores)].

10. A finalidade deste exercício é provar que todo bivetor $z \neq 0$ em $\overset{2}{\wedge} E$ pode ser escrito sob a forma $z = e_1 \wedge e_2 + \cdots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}$, onde $e_1, \ldots, e_{2r}$ são linearmente independentes. Segue-se do exercício

anterior que $2r$ é o posto de z. (Em particular, todo bivetor tem posto par.) Para isso, ponha $z = \sum_{i<j} a_{ij} u_i \wedge u_j$, em termos de uma base $(u_1, \ldots, u_m)$ de E, onde $a_{12} \neq 0$.

a) Escreva $e_1 = u_1 - \frac{a_{23}}{a_{12}} u_3 - \cdots - \frac{a_{2m}}{a_{12}} u_m$ e $e_2 = a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \cdots + a_{1m}u_m$.

Mostre que $e_1, e_2, u_3, \ldots, u_m$ são linearmente independentes.

b) Prove que, escrevendo $z = e_1 \wedge e_2 + z_1$, o bivetor z_1 não é divisível por u_1 nem por u_2.

c) Escreva z_1 como combinação linear dos produtos $u_i \wedge u_j$ $(2 < i < j)$ e, se for $z_1 \neq 0$, repita com z_1 o processo indicado em a). Mostre que isto conduz finalmente a uma expressão $z = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}$.

11. Um bivetor $z \neq 0$ tem posto $2r$ se, e somente se, r é o maior inteiro positivo tal que $z^r \neq 0$. (Em particular, um bivetor $z \neq 0$ é decomponível se, e somente se, $z^2 = 0$.)

12. a) Seja $z \in \overset{2}{\wedge} E$ um bivetor arbitrário. Dada uma base ordenada $(e_1, \ldots, e_m)$ em E existe uma única expressão $z = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} e_i \wedge e_j$ tal que $A_{ij} = -A_{ji}$. Ponha $A = (A_{ij})$, matriz $m \times m$.

    b) Se $(u_1, \ldots, u_m)$ é outra base ordenada de E, seja $u_j = \sum_{i=1}^{m} B_{ij} e_i$, isto é, $B = (B_{ij})$ é a "matriz de passagem" dos e_i para os u_j, portanto é uma matriz invertível. Mostre que então $z = \sum_{i,j=1}^{m} C_{ij} u_i \wedge u_j$, com $C_{ij} = -C_{ji}$ e a matriz $C = (C_{ij})$ é dada por $C = BA^tB$. Conclua que o posto da matriz $A = (A_{ij})$ em (a) depende somente do bivetor z mas não da base (e_i).

    c) Prove que o posto do bivetor $z = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} e_i \wedge e_j$ é igual ao posto da matriz anti-simétrica $A = (A_{ij})$.

13. Seja $z = z_0 + z_1 + \cdots + z_m$ $(z_r \in \overset{r}{\wedge} E)$ um elemento da álgebra de Grassmann $\wedge E$. Para que z seja invertível é necessário e suficiente que $z_0 \neq 0$.

14. Seja $z \in \overset{r}{\wedge} E$ um r-vetor (decomponível ou não). O subespaço vetorial $S_z = \{v \in E;\ v \wedge z = 0\}$ tem dimensão $\leq r$. Tem-se $\dim S_z = r$ se, e somente se, z é decomponível.

15. As seguintes condições acerca de um elemento z da álgebra de Grassmann $\wedge E$ são equivalentes: a) z pertence ao centro de E (isto é, $z \wedge x = x \wedge z$ para todo $x \in E$); b) $z \wedge x = x \wedge z$ para todo elemento invertível $x \in \wedge E$; c) Se $\dim E$ é par, então $z = \Sigma z_r$ onde $z_r \in \overset{r}{\wedge} E$ e, para todo r ímpar, $z_r = 0$.

16. Sejam α uma matriz $m \times m$ e I a matriz identidade $m \times m$. Para quaisquer números reais x, y, tem-se
$$\det(x\alpha + yI) = \sum_{0 \leq r \leq m} \operatorname{tr}(\overset{r}{\wedge}\alpha) x^r \cdot y^{m-r}$$
[*Sugestão*: Tome a base canônica $(e_1, \ldots, e_m)$ em $\mathbb{R}^m$, desenvolva o produto $(x\tilde{\alpha}\cdot e_1 + ye_1) \wedge (x\tilde{\alpha}\cdot e_2 + ye_2) \wedge \cdots \wedge (x\tilde{\alpha}\cdot e_m + ye_m)$ e observe que $\operatorname{tr}(\overset{r}{\wedge}\alpha) = \sum_J \det(\alpha_J^J)$, onde $J \subset I_m$ percorre os subconjuntos com r elementos.]

17. Sejam $T\colon E \to E$ um endomorfismo e $\wedge T\colon \wedge E \to \wedge E$ o endomorfismo induzido. Prove que $\operatorname{tr}(\wedge T) = \det(I + T)$, onde $I\colon E \to E$ é a aplicação identidade.

18. Se $J \subset I_m$ tem r elementos e $K \subset I_m$ tem $m - r$ elementos mas $K \neq J'$, prove que $\sum_I \varepsilon(I) \det(\alpha_J^I) \det(\alpha_K^{I'}) = 0$, onde a soma se estende a todos os subconjuntos $I \subset I_m$ com r elementos.

19. Sejam $f\colon E \to F$ uma transformação linear e $\wedge f\colon \wedge E \to \wedge F$ o homorfismo induzido. Prove que o núcleo de $\wedge f$ é o ideal de $\wedge E$ gerado pelo núcleo de f.

20. Dados $x, y \in \wedge E$, ponhamos $[x, y] = x \wedge y - y \wedge x$. Prove que, para quaisquer $x, y, z \in \wedge E$, temos $[[x, y], z] = 0$.

21. Seja $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i x^j = \beta^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ um sistema de m equações lineares nas n incógnitas $x^1, \ldots, x^n$. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as colunas da matriz $\alpha = (\alpha_j^i)$. Suponha que todos os subdeterminantes menores

de ordem $> p$ de α são nulos mas $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \neq 0$. Prove que o sistema tem solução se, e somente se, $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta = 0$, onde $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^m)$.

22. Dado $0 \neq z \in \overset{r}{\wedge} E$, seja $S_z = \{v \in E;\ v \wedge z = 0\}$.

    (Vide Exercício 14.) Se $v_1, \ldots, v_s$ são vetores linearmente independentes em S_z então existe $y \in \overset{r-s}{\wedge} E$ tal que $z = y \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s$.

23. Seja $z = x \wedge z$ em $\wedge E$. Se z e x são decomponíveis, então existe y' decomponível tal que $z = x \wedge y'$.

24. Se $z \in \overset{r}{\wedge} E$ é decomponível então $S_z = M_z$. (Vide Exercício 22 e Exercício 7 do Capítulo 5.) Prove que, dado $z = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ em $\overset{2}{\wedge} \mathbb{R}^4$, temos $S_z = 0$ e $M_z = \mathbb{R}^4$. Mostre que, em geral, vale a inclusão $S_z \subset M_z$.

25. Sejam $x, y \in \overset{r}{\wedge} E$ decomponíveis. A fim de que a soma $x + y$ seja ainda decomponível é necessário e suficiente que $\dim(M_x \cap M_y) \geq r - 1$.

9

Produto Interno de r-vetores

Um *produto interno* num espaço vetorial E é uma forma bilinear (cujo valor num par de vetores $u, v \in E$ indicaremos pelo símbolo $\langle u, v\rangle$), a qual é simétrica e positiva, isto é, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para quaisquer $u, v \in E$ e $\langle u, u, \rangle > 0$ quando $0 \neq u \in E$.

O isomorfismo $\mathcal{L}_2(E; \mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(E; E^*)$, estabelecido na Proposição 1, Capítulo 2, faz corresponder a cada produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em E uma transformação linear $\xi\colon E \to E^*$. Explicitamente, para cada $u \in E$, $\xi(u) \in E^*$ é o funcional linear tal que $\xi(u)\cdot v = \langle u, v\rangle$, $v \in E$ arbitrário. A positividade do produto interno implica, em particular, que $\xi\colon E \to E^*$ é um isomorfismo, chamado o isomorfismo canônico associado ao produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Seja então E um espaço vetorial munido de produto interno. Mostraremos como, a partir daí, se pode definir um produto interno em cada espaço $\overset{r}{\wedge}E$. Com isto em mente, fixemos o inteiro $r > 0$ e consideremos a forma $2r$-linear $f\colon E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r) = \det(\langle u_i, v_j\rangle).$$

Como o determinante de uma matriz é uma função multilinear alternada das linhas e das colunas dessa matriz, segue-se que $f \in \mathfrak{A}_{r,r}(E; \mathbb{R})$, isto é, f é alternada nos u's e nos v's separadamente. (Vide início do Capítulo 8.) Então f induz uma forma bilinear

$$\langle\ ,\ \rangle\colon \overset{r}{\wedge} E \times \overset{r}{\wedge}E \to \mathbb{R},$$

caracterizada por

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)$$

para quaisquer $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r \in E$.

Esta forma é evidentemente simétrica. Para provar que se trata de um produto interno em $\overset{r}{\wedge} E$, resta mostrar que ela é positiva. Isto equivale a provar que o determinante $\det(\langle u_i, u_j \rangle)$, conhecido como o *Gramiano* dos vetores $u_1, \ldots, u_r$, é sempre ≥ 0 e só se anula quando os vetores u_i são linearmente dependentes. Estes fatos vão resultar da nossa discussão. Raciocinaremos indiretamente, do modo seguinte.

Seja $(e_1, \ldots, e_m)$ uma base ortonormal de E. Ela determina uma base de $\overset{r}{\wedge} E$, a qual consiste nos r-vetores e $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$, onde $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ percorre todos os subconjuntos de I_m com r elementos. Dado o subconjunto $K = \{k_1 < \cdots < k_r\}$, temos $e_K = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_r}$ e, por definição:

$$\langle e_J, e_K \rangle = \det(\langle e_j, e_k \rangle), \quad j \in J, \;\; k \in K.$$

Se for $K \neq J$ existirá um $k_0 \notin J$, de modo que $\langle e_j, e_{k_0} \rangle = 0$ para todo $j \in J$. Então $\langle e_J, e_K \rangle = 0$ porque se trata de um determinante com uma coluna nula. Por outro lado, é claro que $\langle e_J, e_J \rangle = 1$ para todo J. Por conseguinte, a base $(e_J)_{J \subset I_m}$ em $\overset{r}{\wedge} E$ é "ortonormal" relativamente à forma bilinear $\langle \;,\; \rangle$. Isto acarreta imediatamente por $\langle \;,\; \rangle$ é uma forma positiva, conforme veremos agora.

Com efeito, dados $x = \sum_J \xi^J e_J$ e $y = \sum_K \eta^K e_K$ em $\overset{r}{\wedge} E$, a "ortonormalidade" da base (e_J) implica que se tem $\langle x, y \rangle = \sum_J \xi^J \eta^J$. Em particular, $\langle x, x \rangle = \sum_J (\xi^J)^2$, donde $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \overset{r}{\wedge} E$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Fica assim constatado que o que definimos foi de fato um produto interno em $\overset{r}{\wedge} E$. Em particular, são válidas as propriedades do determinante Gramiano acima mencionadas. Observemos que, para $r = 2$, a positividade do determinante Gramiano dos vetores $u, v \in E$ se exprime por $\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle$ (com igualdade valendo apenas se u e v forem linearmente dependentes). Esta é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. A interpretação do Gramiano dentro do contexto de produto interno em $\overset{r}{\wedge} E$ tem também a seguinte aplicação.

Proposição 1 – (Identidade de Lagrange.) *Seja α uma matriz $m \times r$ com $m \geq r$. Indicando com ${}^t\alpha$ a matriz transposta de α, temos*

$$\det({}^t\alpha \cdot \alpha) = \sum_J \det(\alpha^J)^2$$

onde a soma se estende a todos os subconjuntos $J \subset I_m$ com r elementos, e α^J é a matriz $r \times r$ obtida de α escolhendo-se as r linhas cujos índices pertencem a J.

Demonstração: A identidade de Lagrange resulta de calcularmos o quadrado da norma de um r-vetor decomponível $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \in \overset{r}{\wedge} E$ primeiro a partir da definição do produto interno em $\overset{r}{\wedge} E$ e depois em termos de suas coordenadas relativamente a uma base ortonormal. Com efeito, seja $(e_1, \ldots, e_m)$ uma base ortonormal em E. Dados os vetores

$$u_1 = \sum_i \alpha_1^i e_i, \ldots, u_r = \sum_i \alpha_r^i e_i,$$

as coordenadas de cada um dos quais formam uma coluna da matriz $\alpha = (\alpha_j^i) \in M(m \times r)$, temos

$$\langle u_i, u_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \alpha_j^k \quad i, j \in I_r.$$

Isto significa que a matriz $(\langle u_i, u_j \rangle)$, de tipo $r \times r$, é o produto ${}^t\alpha \cdot \alpha$, da transposta ${}^t\alpha$ pela matriz α. Por outro lado, o r-vetor $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ se exprime em relação à base ortonormal (e_J) de $\overset{r}{\wedge} E$ como

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = \sum_J \det(\alpha^J) e_J.$$

Por conseguinte, podemos escrever:

$$\det({}^t\alpha \cdot \alpha) = \det(\langle u_i, u_j \rangle) = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_r|^2 = \sum_J \det(\alpha^J)^2.$$

□

Observação: Quando $m > r$, o determinante da matriz $\alpha \cdot {}^t\alpha$ é sempre zero. (Ou, equivalentemente, se $\alpha \in M(m \times r)$ e $m < r$ então $\det({}^t\alpha \cdot \alpha) = 0$.) Com efeito, se $\alpha \in M(m \times r)$ então $\alpha \cdot {}^t\alpha$ é matriz

de uma transformação linear composta $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$, a qual nunca pode ser injetiva pois, sendo $m > r$, a primeira aplicação $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ já não é injetiva. Em outras palavras, o processo ${}^t\alpha \cdot \alpha$ faz passar de uma matriz $m \times r$ para uma matriz quadrada $r \times r$. Quando $r > m$ isto daria uma matriz maior do que a original. Seria muito otimismo esperar que este produto inflacionado fosse não degenerado...

Agora uma justificativa para a definição que demos para o produto interno em $\overset{r}{\wedge}E$. Por que o determinante? A definição dada é natural se a encaramos assim: ao produto interno de E está associado um isomorfismo canônico $\xi\colon E \to E^*$, o qual induz uma transformação linear (na realidade, um isomorfismo) $\overset{r}{\wedge}\xi\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge}E^*$, definido por $\overset{r}{\wedge}\xi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = \xi(u_1) \wedge \cdots \wedge \xi(u_r)$. Identificando $\overset{r}{\wedge}E^*$ com o espaço dual de $\overset{r}{\wedge}E$, vemos que existe uma única forma bilinear φ em $\overset{r}{\wedge}E$ tal que $\varphi(x, y) = \overset{r}{\wedge}\xi(x) \cdot y$ para quaisquer $x, y \in \overset{r}{\wedge}E$. A forma φ fica determinada pelos valores que assume nos vetores decomponíveis. Ora, temos

$$\begin{aligned}
&\varphi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)\\
&\quad = \overset{r}{\wedge}\xi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)\\
&\quad = (\xi(u_1) \wedge \cdots \wedge \xi(u_r)) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)\\
&\quad = \det(\xi(u_i) \cdot v_j) = \det(\langle u_i, v_j \rangle).
\end{aligned}$$

Então φ coincide com o produto interno que definimos em $\overset{r}{\wedge}E$. A razão pela qual o definimos assim é pois: era a única maneira de fazer com que o isomorfismo canônico $\overset{r}{\wedge}\xi\colon \overset{r}{\wedge} E \to (\overset{r}{\wedge}E)^*$, a ele associado, fosse induzido (na forma do Capítulo 7) pelo isomorfismo canônico $\xi\colon E \to E^*$, associado ao produto interno original de E.

O comprimento de um r-vetor decomponível $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ pode ser interpretado como o volume de um paralelepípedo, como veremos agora.

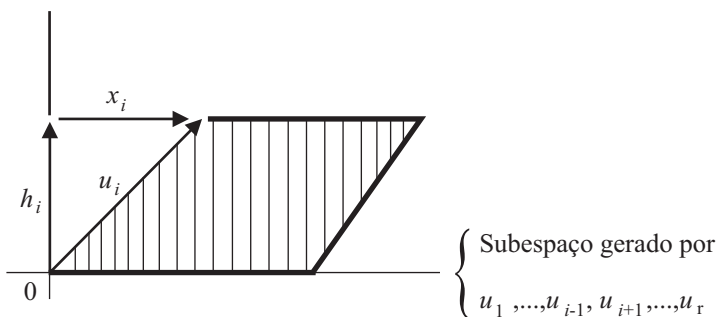
Seja E um espaço vetorial com produto interno. O *paralelepípedo* gerado por r vetores linearmente independentes $u_1, \ldots, u_r \in E$ é o conjunto de todas as combinações lineares $t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_ru_r$, onde $0 \leq t_i \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Ele será indicado pela notação $[u_1, \ldots, u_r]$.

A *i-ésima altura* do paralelepípedo $[u_1, \ldots, u_r]$ é o vetor h_i, pertencente ao subespaço gerado por $u_1, \ldots, u_r$, que é, naquele subespaço, a projeção ortogonal do vetor u_i sobre o eixo perpendicular a

$u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r$. A i-ésima altura h_i é caracterizada pelas seguintes propriedades:

a) $x_i = u_i - h_i$ é uma combinação linear de $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r$.

b) h_i é perpendicular a todos os u_j, $j \neq i$.

A condição a) pode ser expressa pela relação $x_i \wedge (u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i-1} \wedge u_{i+1} \wedge \cdots \wedge u_r) = 0$.

A i-ésima altura h_i

Definiremos o *volume* (r-dimensional) de um paralelepípedo $[u_1, \ldots, u_r]$ por indução. Em primeiro lugar, $\text{vol}[u] = |u|$ para cada vetor $u \in E$. Supondo que $\text{vol}[u_1, \ldots, u_{r-1}]$ já foi definido para todo conjunto de $r-1$ vetores linearmente independentes em E, pomos

$$\text{vol}[u_1, \ldots, u_r] = |h_i| \cdot \text{vol}[u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r],$$

onde h_i é a i-ésima altura do paralelepípedo $[u_1, \ldots, u_r]$. Devemos provar que a definição acima não depende da altura escolhida, isto é, que para todo $i \in I_r$ o segundo membro da igualdade acima tem o mesmo valor. Isto decorre da proposição seguinte.

Proposição 2. *Sejam $u_1, \ldots, u_r$ vetores linearmente independentes num espaço vetorial E, com produto interno. Então* $\text{vol}[u_1, \ldots, u_r] = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_r| = \sqrt{\det(\langle u_i, u_j \rangle)}$.

Demonstração: Em primeiro lugar, mostraremos que se cada um dos vetores $u_1, \ldots, u_r$ for perpendicular a cada um dos vetores $v_1, \ldots, v_s$, então

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s| = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_r| \cdot |v_1 \wedge \cdots \wedge v_s|.$$

Com efeito, neste caso, temos

$$\begin{aligned}|u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_s| &= \det \begin{pmatrix} (\langle u_i, u_j \rangle) & 0 \\ 0 & (\langle v_i, v_j \rangle) \end{pmatrix} \\ &= |u_1 \wedge \cdots \wedge u_r| \cdot |v_1 \wedge \cdots \wedge v_s|.\end{aligned}$$

Em seguida observamos que, escrevendo $u_i = h_i + x_i$, onde $x_i \wedge (u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i-1} \wedge u_{i+1} \wedge \cdots \wedge u_r) = 0$ e h_i é perpendicular a cada u_j com $j \neq i$, obtemos

$$\begin{aligned}|u_1 \wedge \cdots \wedge u_r| &= |u_1 \wedge \cdots \wedge (h_i + x_i) \wedge \cdots \wedge u_r| \\ &= |u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i-1} \wedge h_i \wedge u_{i+1} \wedge \cdots \wedge u_r| \\ &= |h_i| \cdot |u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i-1} \wedge u_{i+1} \wedge \cdots \wedge u_r|.\end{aligned}$$

A Proposição 2 resulta por indução. □

Corolário. *Seja* $(e_1, \ldots, e_m)$ *uma base ortonormal em* E. *Dados os vetores* $u_1 = \sum_i \alpha_1^i e_i, \ldots, u_r = \sum \alpha_r^i e_i$, *temos*

$$\mathrm{vol}[u_1, \ldots, u_r] = \sqrt{\sum_J \det(\alpha^J)^2},$$

onde $\alpha = (\alpha_j^i)$ *é a matriz* $m \times r$ *das coordenadas dos vetores* u_i *e* α^J *descreve a coleção das submatrizes* $r \times r$ *de* α. *Em particular, quando* $m = r$, *o volume do paralelepípedo* $[u_1, \ldots, u_m]$ *é o valor absoluto* $|\det(\alpha)|$ *do determinante da sua matriz de coordenadas.*

Isto se segue da identidade de Lagrange.

Estenderemos a definição de volume de um paralelepípedo pondo $\mathrm{vol}[u_1, \ldots, u_r] = 0$ quando $u_1, \ldots, u_r$ forem linearmente dependentes. Isto é compatível com o fato de que, neste caso, $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = 0$. Assim, teremos sempre $\mathrm{vol}[u_1, \ldots, u_r] = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_r|$, quer os vetores $u_1, \ldots, u_r$ sejam independentes ou não.

Casos particulares de paralelepípedos são segmentos ($r = 1$), paralelogramos ($r = 2$) e paralelepípedos do espaço usual ($r = 3$).

Convém observar que o $\mathrm{vol}[u_1, \ldots, u_r]$ conforme definimos é o *volume* r*-dimensional*. Assim, por exemplo, se $u, v \in \mathbb{R}^3$ forem valores linearmente independentes, tem-se $\mathrm{vol}[u, v] > 0$. Isto significa que u e v definem um paralelogramo não-degenerado em $\mathbb{R}^3$, cuja área, $\mathrm{vol}[u, v]$, é

positiva. Por outro lado, se $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ forem linearmente dependentes, então o conjunto $[u, v, w] = [t_1 u + t_2 v + t_3 w;\ 0 \leq t_1, t_2, t_3, \leq 1\}$ é um paralelepípedo degenerado, ou seja, reduz-se a um polígono plano, um segmento de reta ou a um ponto. Logo, neste caso, $\mathrm{vol}[u, v, w] = 0$ (volume 3-dimensional).

No tratamento clássico do Cálculo Vetorial em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, define-se um vetor (livre) como uma "classe de equivalência" de segmentos orientados. Os r-vetores decomponíveis de um espaço vetorial E, munido de produto interno, também podem ser definidos geometricamente, cada um deles sendo a classe de equipolência de uma seqüência $(u_1, \ldots, u_r)$ de r vetores linearmente independentes em E. Duas seqüências $(u_1, \ldots, u_r)$ e $(v_1, \ldots, v_r)$ são *equipolentes* quando cumprem as seguintes condições:

1) Elas geram o mesmo subespaço r-dimensional em E.

2) Os paralelepípedos $[u_1, \ldots, u_r]$ e $[v_1, \ldots, v_r]$ têm o mesmo volume.

3) As duas seqüências estão "igualmente orientadas", isto é, se $u_j = \sum\limits_{i=1}^{r} a_j^i v_i$ $(j = 1, \ldots, r)$ então $\det(a_j^i) > 0$.

A condição (1) significa que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = a \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$. A condição (2), acrescentada a (1), fornece $a = \pm 1$, ou seja $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = \pm v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$. A condição (3), finalmente, exclui o sinal $-$ e dá a igualdade $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$.

Ao contrário, porém, do cálculo vetorial uni-dimensional, não existe uma definição geométrica da soma de dois r-vetores decomponíveis. Melhor dizendo: como a soma de dois r-vetores decomponíveis não é, em geral, decomponível, não é possível desenvolver o cálculo de r-vetores numa linha puramente geométrica, a partir da definição acima, como se faz para 1-vetores. Esta dificuldade talvez justifique a obscuridade em que permaneceu a obra de Grassmann durante meio século, até ser redescoberta por E. Cartan.

Exercícios

1. Seja E um espaço vetorial com produto interno. Prove que, se $w \in \overset{r}{\wedge} E$ for decomponível então, para cada $z \in \overset{s}{\wedge} E$ tem-se $|w \wedge z| \leq |w| \cdot |z|$.

2. Mostre que se $(e_1, \ldots, e_6)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^6$, tomando $w = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ com todos os $a_{ij} = 1$, salvo $a_{13} = a_{46} = -1$, tem-se $|w \wedge w| = 252$, $|w|^2 = 15$. Logo, a hipótese de w decomponível é necessária no Exercício 1.

3. Dada uma base ortonormal $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E, sejam $v_1 = \sum_i \alpha_1^i e_i, \ldots, v_m = \sum_i \alpha_m^i e_i$ m vetores linearmente independentes e seja $\alpha = (\alpha_j^i)$ a matriz de suas coordenadas. Então $\operatorname{vol}[v_1, \ldots, v_m] = |\det[v_1, \ldots, v_m]| = |\det(\alpha)|$.

4. Seja $T\colon E \to E$ um endomorfismo linear num espaço E com produto interno. Então, para cada paralelepípedo $[v_1, \ldots, v_m]$, tem-se
$$\operatorname{vol}[T \cdot v_1, \ldots, T \cdot v_m] / \operatorname{vol}[v_1, \ldots, v_m] = |\det(T)|.$$

5. Num espaço vetorial E sem produto interno, não tem sentido falar em volume de um paralelepípedo, mas existe a noção de "razão entre os volumes" de dois paralelepípedos m-dimensionais, onde $m = \dim E$, a qual representaremos pelo símbolo
$$\operatorname{vol}[v_1, \ldots, v_m] / \operatorname{vol}[u_1, \ldots, u_m].$$
Defina esta noção e prove que
$$(\operatorname{vol}[w_1, \ldots, w_m] / \operatorname{vol}[v_1, \ldots, v_m]) \cdot (\operatorname{vol}[v_1, \ldots, v_m] / \operatorname{vol}[u_1, \ldots, u_m]) = \operatorname{vol}[w_1, \ldots, w_n] / \operatorname{vol}[u_1, \ldots, u_m].$$
Conclua que o exercício anterior faz sentido e é verdadeiro mesmo quando E não possui produto interno.

6. Seja $\pi\colon E \to E$ uma projeção ortogonal. Dados $y_1, \ldots, y_s$, ponha $y_1' = \pi \cdot y_1, \ldots, y_s' = \pi \cdot y_s$. Prove que $\operatorname{vol}[y_1', \ldots, y_s'] \leq \operatorname{vol}[y_1, \ldots, y_s]$, valendo a igualdade somente quando $y_i = y_i'$ para cada $i = 1, \ldots, s$.

7. Com a notação do exercício anterior, ponha $y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$, $y' = y_1' \wedge \cdots \wedge y_s'$ e tome $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$, onde $x_1, \ldots, x_r$ pertencem ao núcleo da projeção π. Prove que $x \wedge y = x \wedge y'$.

8. Dados $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ e $y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$ com $x \wedge y \neq 0$, prove que $|x \wedge y| = |x| \cdot |y|$ se, e somente se, cada x_i é perpendicular a cada y_j. (Use os dois exercícios anteriores.)

10

Orientação

Neste capítulo, a notação E indicará um espaço vetorial de dimensão > 0.

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto das bases ordenadas $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ de um espaço vetorial E. Dadas $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ pertencentes a $\mathcal{B}$, diremos que estas bases são *igualmente orientadas* quando a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ tiver determinante positivo.

Se $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ e $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_m)$, então a *matriz de passagem* de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ é a matriz $\lambda = (\lambda_j^i)$, de tipo $m \times m$, definida pelas relações $f_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_j^i e_i$ $(j = 1, \ldots, m)$. Assim, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são igualmente orientadas se, e somente se, $\det(\lambda_j^i) > 0$.

A relação "$\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são igualmente orientadas" é uma relação de equivalência em $\mathcal{B}$. Com efeito, se indicarmos com $M(\mathcal{E}; \mathcal{F})$ a matriz de passagem da base $\mathcal{E}$ para a base $\mathcal{F}$, as propriedades reflexiva, transitiva e simétrica dessa relação decorrem imediatamente dos seguintes fatos a respeito da matriz da passagem, os quais podem ser facilmente constatados pelo leitor:

(a) $M(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ = matriz identidade $m \times m$;
(b) $M(\mathcal{E}; \mathcal{G}) = M(\mathcal{E}; \mathcal{F}) \cdot M(\mathcal{F}; \mathcal{G})$;
(c) $M(\mathcal{E}; \mathcal{F}) = M(\mathcal{F}; \mathcal{E})^{-1}$.

Fixemos uma base ordenada $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ em E e escrevamos $\overline{\mathcal{E}} = (-e_1, e_2, \ldots, e_m)$. A matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\overline{\mathcal{E}}$ tem a forma $M(\mathcal{E}, \overline{\mathcal{E}}) = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Temos $M(\mathcal{E}; \mathcal{F}) = M(\mathcal{E}; \overline{\mathcal{E}}) \cdot M(\overline{\mathcal{E}}; \mathcal{F})$, logo a matriz de passagem $M(\mathcal{E}; \mathcal{F})$ difere de $M(\overline{\mathcal{E}}; \mathcal{F})$ pela troca dos

sinais dos elementos da primeira linha. Em particular, $\det[M(\overline{\mathcal{E}};\mathcal{F})] = -\det[M(\mathcal{E};\mathcal{F})]$. Resumindo: uma base ordenada $\mathcal{F}$, ou é equivalente a $\mathcal{E}$ ou a $\overline{\mathcal{E}}$. Isto prova a

Proposição 1. *Em todo espaço vetorial, a relação "$\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são igualmente orientadas" determina duas classes de equivalência no conjunto das bases ordenadas.*

Cada uma das classes de equivalência acima é chamada uma *orientação* do espaço vetorial E.

Portanto, uma orientação de um espaço vetorial E é uma coleção $\mathcal{O}$ de bases ordenadas de E com as seguintes propriedades:

1) Se $(e_1,\ldots,e_m) \in \mathcal{O}$ e $(f_1,\ldots,f_m) \in \mathcal{O}$ com $f_j = \sum_i \lambda_j^i e_i$ $(j = 1,\ldots,m)$, então $\det(\lambda_j^i) > 0$.
2) Se $\mathcal{G} = (g_1,\ldots,g_m)$ é uma base ordenada que não pertence a $\mathcal{O}$ então, para cada $\mathcal{E} \in \mathcal{O}$, a matriz de passagem $M(\mathcal{E};\mathcal{G})$ tem determinante negativo.

Existem duas orientações possíveis em cada espaço vetorial E.

Um *espaço vetorial orientado* é um espaço vetorial E no qual uma das suas orientações foi escolhida como a favorita. Mais precisamente, é um par $(E,\mathcal{O})$ onde $\mathcal{O}$ é uma orientação no espaço vetorial E.

Num espaço vetorial orientado $(E,\mathcal{O})$, as bases ordenadas que pertencem à orientação $\mathcal{O}$ chamam-se *positivas*. As outras são chamadas *negativas*. Evidentemente, dada uma base ordenada $\mathcal{E}$ em E, existe uma única orientação *determinada* pela base $\mathcal{E}$.

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ possui uma *orientação canônica*, a saber, a que é determinada pela base canônica $(e_1,\ldots,e_m)$, com $e_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,e_m = (0,\ldots,0,1)$, nesta ordem.

Estas definições são motivadas pela seguinte proposição de Topologia, que não demonstraremos aqui.

Proposição 2. *Sejam $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_m)$ e $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_m)$ bases ordenadas do espaço $\mathbb{R}^m$. A fim de que a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ tenha determinante positivo é necessário a suficiente que existam m aplicações contínuas $g_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ tais que, para cada $t \in [0,1]$, $(g_1(t),\ldots,g_m(t))$ seja uma base ordenada de $\mathbb{R}^m$ e, para cada $i = 1,\ldots,m$, se tenha $g_i(0) = e_i$, $g_i(1) = f_i$.* (V. "Curso de Análise", vol. 2, apêndice ao §10 do Cap. VII.)

Em outras palavras, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são igualmente orientadas se, e somente se, é possível deformar continuamente $\mathcal{E}$ em $\mathcal{F}$, na unidade de tempo, de maneira que, em todo instante da deformação, os vetores em questão não deixem de constituir uma base de $\mathbb{R}^m$.

Quando $\dim E = 1$, uma base de E é simplesmente um vetor não-nulo. Dadas duas dessas bases, digamos u, v, tem-se $u = \lambda \cdot v$ onde $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Os vetores $u, v \in E - \{0\}$ são igualmente orientados ou não, conforme seja $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. No caso presente, E é homeomorfo a $\mathbb{R}$ e uma orientação de E é uma das duas componentes conexas de $E - \{0\}$. Quando se tem $E = \mathbb{R}$, a orientação canônica consiste em tomar os números reais positivos como os "vetores positivos". Para um espaço E arbitrário de dimensão 1 não existe um meio de distinguir uma das componentes conexas de $E - \{0\}$ como privilegiada. Escolher uma delas, ou seja, escolher um vetor não-nulo $v \in E$, significa orientar o espaço E. Quando o espaço vetorial E, de dimensão 1, possui um produto interno existem exatamente dois vetores de comprimento 1 em E. Orientar E corresponde a escolher um desses vetores como positivo.

Se $\dim E = m$, então $\dim \overset{m}{\wedge} E = 1$. Os elementos não-nulos de $\overset{m}{\wedge} E$ são os produtos exteriores $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$ onde $(e_1, \ldots, e_m)$ é uma base ordenada de E. Dados dois deles, temos $f_1, \wedge \cdots \wedge f_m = \delta \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_m)$, onde δ é o determinante da matriz de passagem de $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ para $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_m)$.

Portanto as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são igualmente orientadas se, e somente se, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_m$ é um múltiplo positivo de $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$ no espaço unidimensional $\overset{m}{\wedge} E$. Em outras palavras, orientar E é o mesmo que orientar $\overset{m}{\wedge} E$. Quando E é orientado e possui um produto interno, existe um único m-vetor positivo $e \in \overset{m}{\wedge} E$, de comprimento 1. Para toda base ortonormal positiva $(e_1, \ldots, e_m)$ em E tem-se $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$. O m-vetor e determina a orientação do espaço E.

Num espaço vetorial orientado E, de dimensão m, uma forma exterior ω de grau m chama-se uma *forma positiva* quando $\omega(e_1, \ldots, e_m) > 0$ para alguma base positiva $(e_1, \ldots, e_m)$ em E. Neste caso, para qualquer outra base ordenada $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_m)$, temos $\omega(f_1, \ldots, f_m) = \det(\lambda) \cdot (e_1, \ldots, e_m)$, onde λ é a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$. Então ω assumirá valores positivos em *todas* as bases positivas de E. (Evidentemente, $\omega(v_1, \ldots, v_m) = 0$ se $(v_1, \ldots, v_m)$ não for uma base.) Uma forma m-linear alternada $\omega \in \overset{m}{\wedge} E^*$ será chamada uma *forma negativa*

quando assumir um valor negativo numa (e portanto em qualquer) base positiva de E.

Por meio da noção de forma positiva, vemos que uma orientação em E determina uma orientação em $\overset{m}{\wedge}E^*$ ($m = \dim E$) e portanto em E^*. Reciprocamente, dada uma orientação em E^* (e portanto em $\overset{m}{\wedge}E^*$), fica definida uma orientação em E segundo a qual as bases positivas $(e_1, \ldots, e_m)$ são aquelas tais que $\omega(e_1, \ldots, e_m) > 0$ para toda $\omega > 0$ em $\overset{m}{\wedge}E^*$.

Note-se, entretanto, que uma orientação em E não determina uma orientação em $\overset{r}{\wedge}E$ para $1 < r < m$.

Um exemplo particularmente importante de forma exterior positiva é o elemento de volume, que apresentaremos agora.

Para definir a forma *elemento de volume*, necessitamos tomar um espaço vetorial orientado E, munido de produto interno. Seja $m = \dim E$. O elemento de volume de E é a forma $\sigma \in \overset{m}{\wedge}E^*$ que na seqüência de vetores $u_1, \ldots, u_m \in E$ assume o valor

$$\begin{aligned}\sigma(u_1, \ldots, u_m) &= \pm \operatorname{vol}[u_1, \ldots, u_m] \\ &= \pm|u_1 \wedge \cdots \wedge u_m| = \pm\sqrt{\det(\langle u_i, u_j\rangle)}.\end{aligned}$$

O sinal deve ser positivo se $(u_1, \ldots, u_m)$ for uma base positiva de E e negativo em caso contrário. Se $u_1, \ldots, u_m$ forem linearmente dependentes, então $\sigma(u_1, \ldots, u_m) = 0$, evidentemente. O número $\sigma(u_1, \ldots, u_m)$ chama-se o *volume orientado* do paralelepípedo $[u_1, \ldots, u_m]$.

Nenhuma das expressões acima deixa claro que $\sigma(u_1, \ldots, u_m)$ depende linearmente de cada u_i (embora seja óbvio que $\sigma(u_1, \ldots, u_m) = 0$ se $u_i = u_j$ para algum $i \neq j$).

Para provar que σ é, de fato, uma forma m-linear (alternada), tomemos uma base ortonormal positiva $(e_1, \ldots, e_m)$ em E e escrevamos $u_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j^i e_i$ ($j = 1, \ldots, m$). A matriz $\alpha = (\alpha_j^i)$ é tal que $(\langle u_1, u_j\rangle) = {}^t\alpha{\cdot}\alpha$, de modo que $\det(\langle u_i, u_j\rangle) = [\det(\alpha)]^2$. Portanto $[\sigma(u_1, \ldots, u_m)]^2 = [\det(\alpha)]^2$. Daí:

$$\sigma(u_1, \ldots, u_m) = \det(\alpha).$$

já que $\det(\alpha) > 0$ ou $\det(\alpha) < 0$ conforme a base ordenada $(u_1, \ldots, u_m)$ seja positiva ou negativa. Como $\det(\alpha)$ é uma função m-linear alternada das colunas da matriz α (cada uma das quais é formada pelas coordenadas de um vetor u_j), concluimos que $\sigma \in \mathfrak{A}_m(E; \mathbb{R})$.

Evidentemente, se trocarmos a orientação de E (mantendo o mesmo produto interno) o novo elemento de volume será $-\sigma$.

A última expressão obtida para a forma elemento de volume mostra que se $(e_1, \ldots, e_m)$ é uma base ortonormal positiva de E então, para quaisquer $u_1, \ldots, u_m \in E$, tem-se

$$\sigma(u_1, \ldots, u_m) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_m = u_1 \wedge \cdots \wedge u_m,$$

ou seja

$$\sigma(u_1, \ldots, u_m) = \langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \rangle,$$

onde fazemos uso do produto interno induzido em $\overset{m}{\wedge} E$, segundo o qual $|e_1 \wedge \cdots \wedge e_m| = 1$.

Qualquer das igualdades acima poderia ter sido adotada como definição do elemento de volume σ.

Usaremos o elemento de volume para definir um isomorfismo entre r-vetores e $(m-r)$-vetores num espaço vetorial E orientado, m-dimensional, com produto interno.

Para cada $r = 1, \ldots, m$, $\overset{m-r}{\wedge} E$ herda um produto interno de E. Existe uma única transformação linear

$$D \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$$

tal que, para quaisquer $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{m-r} \in E$, tem-se:

$$\langle D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r} \rangle = \sigma(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{m-r}).$$

A unicidade de D é imediata: conhecendo o produto interno do $(m-r)$-vetor $D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)$ por cada $(m-r)$-vetor decomponível, fica determinado seu produto interno por cada $z \in \overset{m-r}{\wedge} E$ e portanto $D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)$ é univocamente caracterizado pela relação acima. Por outro lado, conhecendo-se o valor da transformação linear E em cada r-vetor decomponível $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ (caso D exista) ela fica inteiramente determinada.

Para provar a existência de uma D satisfazendo a relação acima, basta tomar a imagem do elemento de volume $\sigma \in \mathfrak{A}_m(E; \mathbb{R})$ pela aplicação composta:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m(E; \mathbb{R}) \subset \mathfrak{A}_{r,m-r}(E; \mathbb{R}) &\approx \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge} E; \mathcal{L}(\overset{m-r}{\wedge} E; \mathbb{R})) \\ &= \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge} E; (\overset{m-r}{\wedge} E)^*) \approx \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge} E; \overset{m-r}{\wedge} E) \end{aligned}$$

onde a última aplicação é induzida pelo isomorfismo $(\overset{m-r}{\wedge} E)^* \approx \overset{m-r}{\wedge} E$, definido pelo produto interno entre $(m-r)$-vetores. É fácil verificar que a aplicação linear composta $\mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge} E; \overset{m-r}{\wedge} E)$ (a qual é injetiva) transforma $\sigma \in \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R})$ numa $D \in \mathcal{L}(\overset{r}{\wedge} E; \overset{m-r}{\wedge} E)$ que satisfaz a condição estipulada.

Vamos mostrar que a transformação linear $D\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$ é um isomorfismo e, na realidade, uma isometria relativamente aos produtos internos dos espaços $\overset{r}{\wedge} E$ e $\overset{m-r}{\wedge} E$.

Para isto, seja $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma base ortonormal positiva em E. Dado $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$, indiquemos com $J' = \{j'_1 < \cdots < j'_{m-r}\}$ o seu complementar em I_m e escrevamos $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}$, $e_{J'} = e_{j'_1} \wedge \cdots \wedge e_{j'_{m-r}}$, $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$. Temos $e_J \wedge e_{J'} = \varepsilon(J) \cdot e$, com $\varepsilon(J) = \pm 1$. (Na realidade $\varepsilon(J) = (-1)^p$, onde p é o número de pares (j, j') com $j \in J$, $j' \in J'$ e $j' < j$.) Para cada subconjunto $K = \{k_1 < \cdots < k_{m-r}\} \subset I_m$, seja $e_K = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{m-r}}$. Segue-se da definição de σ, e da igualdade que define D, que:

$$\langle D \cdot e_J, e_K \rangle = \sigma(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_{m-r}}) = \langle e_J \wedge e_K, e \rangle.$$

Logo

$$\langle D \cdot e_J, e_k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } K \neq J' \\ \varepsilon(J) & \text{se } K = J'. \end{cases}$$

Como a base $(e_{J'})$ de $\overset{m-r}{\wedge} E$ é ortonormal, concluimos que $D \cdot e_J = \varepsilon(J) \cdot e_{J'}$.

Segue-se que $D\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$ é um isomorfismo. Mais do que isto, D é uma isometria, pois transforma a base ortonormal (e_J) de $\overset{r}{\wedge} E$ na base ortonormal $(\varepsilon(J) \cdot e_{J'})$ de $\overset{m-r}{\wedge} E$.

D é chamado o *isomorfismo de dualidade*.

Sejam agora $u_1, \ldots, u_r$ quaisquer r vetores linearmente independentes em E. Tomemos uma base ortonormal $(e_1, \ldots, e_r)$ para o subespaço gerado pelos u_i e estendâmo-la a uma base ortonormal positiva $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_m)$ do espaço E. (Se for $r = m$, tomemos a base $(e_1, \ldots, e_r)$ já positiva.) Então, para algum $a \in \mathbb{R}$, temos $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = a \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)$. Como D é linear, segue-se que

$$D \cdot (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = a \cdot D \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) = a \cdot (e_{r+1} \wedge \cdots \wedge e_m) \quad (*)$$

Vemos desta maneira que o isomorfismo de dualidade

$$D\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$$

transforma r-vetores decomponíveis em $(m-r)$-vetores decomponíveis.

Em particular, como cada 1-vetor é obviamente decomponível e D é sobrejetivo, concluimos que todo $(m-1)$-vetor num espaço vetorial E de dimensão m é decomponível. (Dado E arbitrário, fixe uma orientação e um produto interno em E, a partir dos quais defina D.)

Observação: Como $\binom{m}{r} = \binom{m-r}{r}$, os espaços vetoriais $\overset{r}{\wedge} E$ e $\overset{m-r}{\wedge} E$ têm a mesma dimensão e portanto são isomorfos. Isto é um fato trivial. A importância do isomorfismo de dualidade $D\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$ está em suas propriedades intrinsecas, tanto algébricas como geométricas, deduzidas a partir da relação fundamental

$$\langle D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r}\rangle = \sigma(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{m-r}).$$

Podemos resumir as propriedades mais importantes do isomorfismo de dualidade na proposição seguinte.

Proposição 3. *Seja E um espaço vetorial m-dimensional, orientado e provido de um produto interno. Existe, para cada inteiro $r \in I_m$, um único isomorfismo $D\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$ com as seguintes propriedades:*

D0) *Para cada r-vetor decomponível $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \in \overset{r}{\wedge} E$, $D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r}$ é também decomponível;*

D1) *O subespaço de E gerado por $v_1, \ldots, v_{m-r}$ é o complemento ortogonal do subespaço gerado por $u_1, \ldots, u_r$;*

D2) *$(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{m-r})$ é uma base positiva de E;*

D3) *$|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r}| = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_r|$. (Isto é, os paralelepípedos $[v_1, \ldots, v_{m-r}]$ e $[u_1, \ldots, u_r]$ têm o mesmo volume.)*

Demonstração: Verifiquemos a unicidade primeiro. Se uma transformação linear $D\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$ tem as propriedades acima, então, para cada r-vetor decomponível $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \in \overset{r}{\wedge} E$, o valor $D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r}$ está, em virtude de D1), determinado a menos de um

fator escalar. Por D3), este fator escalar é ± 1. Finalmente, D2) elimina a ambiguidade entre $+1$ e -1 pois define o "sinal" do m-vetor $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r}$.
Assim duas transformações lineares que cumpram as propriedades acima coincidem nos r-vetores decomponíveis e portanto são iguais. Isto prova a unicidade. Quanto à existência, já possuimos o isomorfismo D. Resta-nos apenas verificar que ele satisfaz essas condições. D0) é óbvia. D1) é conseqüência imediata da igualdade (*) acima. D2) segue-se de

$$\begin{aligned}\sigma(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{m-r}) &= \langle D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r} \rangle \\ &= |v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-r}|^2 > 0.\end{aligned}$$

Finalmente, D3) decorre de ser D uma isometria. □

Observações: 1) O isomorfismo de dualidade $D\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$ é às vezes chamado "operação estrela" e escreve-se

$$D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)^*.$$

2) Uma notação mais precisa é $D_r\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E$. Ela deve ser usada sempre que for necessário explicitar o grau r. Sem esta notação, não seria possível enunciar a propriedade:

$$(D_r)^{-1} = (-1)^{r(m-r)} D_{m-r}.$$

Para verificar isto, basta tomar uma base ortonormal positiva em E e notar que

$$\begin{aligned}D_{m-r}(D_r \cdot e_J) &= D_{m-r}(\varepsilon(J) \cdot e_{J'}) = \varepsilon(J) \cdot D_{m-r}(e_{J'}) \\ &= \varepsilon(J) \cdot \varepsilon(J') \cdot e_J\end{aligned}$$

para cada elemento básico $e_J \in \overset{r}{\wedge} E$. Mas $\varepsilon(J') = (-1)^{r(m-r)} \varepsilon(J)$, donde $\varepsilon(J) \cdot \varepsilon(J') = (-1)^{r(m-r)}$. Logo $D_{m-r} \circ D_r$ coincide com $(-1)^{r(m-r)} D_r$.

Consideremos o caso especial $r = m - 1$. Obtemos uma isometria

$$D\colon \overset{m-1}{\wedge} E \to E.$$

Compondo D com qualquer produto exterior $\wedge\colon E \times \cdots \times E \to \overset{m-1}{\wedge} E$ obtemos uma aplicação $(m-1)$-linear alternada

$$\times\colon E \times \cdots \times E \to E,$$

que chamaremos o *produto vetorial*. (Note-se que para definir o produto vetorial $\times = D \circ \wedge$ foram utilizados o produto interno e a orientação de E.) Escreveremos

$$\times(u_1, \ldots, u_{m-1}) = u_1 \times \cdots \times u_{m-1},$$

de modo que $u_1 \times \cdots \times u_{m-1} = D(u_1 \wedge \cdots \wedge u_{m-1}) \in E$, para quaisquer $u_1, \ldots, u_{m-1} \in E$. A aplicação $\times \colon E \times \cdots \times E \to E$ goza das propriedades de um produto exterior de grau $m - 1$. Podemos caracterizar o produto vetorial $v = u_1 \times \cdots \times u_{m-1}$ de $m - 1$ vetores em E por meio das seguintes propriedades:

1) v é ortogonal ao subespaço gerado por $u_1, \ldots, u_m$;

2) Se $u_1, \ldots, u_{m-1}$ forem linearmente dependentes, então $v = 0$. Do contrário $(u_1, \ldots, u_{m-1})$ é uma base positiva de E.

3) $|v| = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_{m-1}| =$ volume[$(m-1)$-dimensional] do paralelepípedo gerado por $u_1, \ldots, u_{m-1}$.

A propriedade 1) determina o eixo onde v está situado; 2) diz de qual lado do zero v se coloca nesse eixo; 3) diz o comprimento de v e portanto a locação exata de v no eixo.

Em particular, decorre desta caracterização que o produto vetorial $\times = D \circ \wedge$ não depende do produto exterior $\wedge$ utilizado para definí-lo.

O produto vetorial $v = u_1 \times \cdots \times u_{m-1}$ satisfaz as seguintes identidades, válidas para todo vetor $x \in E$:

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_{m-1} \wedge x = \langle v, x \rangle \cdot e,$$

$$\langle v, x \rangle = \sigma(u_1, \ldots, u_{m-1}, x),$$

$$\langle v, x \rangle = \det_{\mathcal{E}}[u_1, \ldots, u_{m-1}, x].$$

Acima $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ é qualquer base ortonormal positiva de E e $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$.

Se escrevermos $u_j = \sum\limits_i \alpha_j^i e_i$ $(j = 1, \ldots, m)$, concluiremos que, para todo $x = \sum x^i e_i$, vale:

$$\langle u_1 \times \cdots \times u_{m-1}, x \rangle = \det \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_{m-1}^1 & x^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{m-1}^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \cdots & \alpha_{m-1}^m & x^m \end{vmatrix} \qquad \text{(A)}$$

Tomemos $x = e_i$. Indicando com $\alpha^{(i)}$ a matriz $(m-1) \times (m-1)$ obtida de $\alpha = (\alpha_j^i)$ pela omissão da i-ésima linha, resulta

$$\langle u_1 \times \cdots \times u_{m-1}, e_i \rangle = (-1)^{m+i} \det[\alpha^{(i)}].$$

Ora, os produtos escalares de um vetor $v \in E$ pelos vetores e_i são as coordenadas e v na base ortonormal $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$. Logo

$$u_1 \times \cdots \times u_{m-1} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m+i} \det[\alpha^{(i)}] \cdot e_i. \tag{B}$$

Em particular, para os elementos da base ortonormal positiva $\mathcal{E}$:

$$e_1 \times \cdots \times e_{i-1} \times e_{i+1} \times \cdots \times e_m = (-1)^{m+i} \cdot e_i. \tag{C}$$

Qualquer das igualdades (A), (B) pode ser utilizada como definição do produto vetorial. Também a igualdade (C), juntamente com a exigência de que $u_1 \times \cdots \times u_{m-1}$ seja uma função $(m-1)$-linear alternada, pode ser tomada como definição.

No caso particular clássico $m = 3$, o produto vetorial é uma aplicação bilinear $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Para $m \neq 3$, a aplicação bilinear alternada menos degenerada possível é o produto exterior $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \overset{2}{\wedge}\mathbb{R}^m$, que toma valores $\overset{2}{\wedge}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m(m-1)/2}$. Em resumo: dados $x, y \in \mathbb{R}^m$, o bivetor $x \wedge y$ só pertence a $\mathbb{R}^m$ quando $m = 3$.

Aqui fica explicado o sinal $(-1)^{m+i}$ $(= (-1)^{m-i})$ no produto vetorial (vide Exemplo 1, Capítulo 5). Ele foi introduzido a fim de que $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_m, (-1)^{m+i} e_i)$ seja uma base positiva de $\mathbb{R}^m$.

Às vezes, a igualdade (B) acima se exprime como um “determinante” simbólico

$$u_1 \times \cdots \times u_{m-1} = \det \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_{m-1}^1 & e^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{m-1}^2 & e^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \cdots & \alpha_{m-1}^m & e^m \end{vmatrix}$$

que deve ser desenvolvido ao longo da última coluna.

Exercícios

1. Seja $0 \neq \omega \in \mathfrak{A}_m(E;\mathbb{R})$, onde $m = \dim E$. Prove que é possível definir um produto interno e uma orientação em E, relativamente aos quais ω é o elemento do volume de E.

2. Seja E um espaço vetorial de dimensão m, orientado e munido de um produto interno. Prove que, para quaisquer $u_1, \ldots, u_{m-1}$ e $v_1, \ldots, v_{m-1}$ em E, tem-se

$$\langle u_1 \times \cdots \times u_{m-1}, v_1 \times \cdots \times v_{m-1} \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle).$$

3. Seja $T\colon E \to E$ linear invertível, onde E é como no exercício acima. Prove que

$$T \cdot u_1 \times \cdots \times T \cdot u_{m-1} = \det(T) \cdot (T^{-1})^*(u_1 \times \cdots \times u_{m-1})$$

para quaisquer $u_1, \ldots, u_{m-1} \in E$.

4. Com as notações dos Exercícios 7, Capítulo 5, e 14, Capítulo 8, prove que, num espaço vetorial orientado E, munido de um produto interno, tem-se $S_{Dz} = (M_z)^\perp$ para todo $z \in \overset{r}{\wedge} E$. (A notação $S^\perp$ indica o complemento ortogonal do subespaço $S \subset E$.)

5. Seja α uma matriz ortogonal $n \times n$. Para cada par de subconjuntos $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ com r elementos, prove que $\det \alpha^I_J = \pm \det \alpha^{I'}_{J'}$. (Observação de Jesus Salazar.)

11

Produto Interior

Neste capítulo, mostraremos como se pode combinar uma r-forma exterior $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$ com um s-vetor $x \in \overset{s}{\wedge} E$, onde $r \geq s$, dando como resultado uma $(r-s)$-forma exterior $f \llcorner x \in \overset{r-s}{\wedge} E^*$, chamada o *produto interior* de f por x.

Fazendo as identificações $\overset{r}{\wedge} E^* = (\overset{r}{\wedge} E)^*$ e $\overset{r-s}{\wedge} E^* = (\overset{r-s}{\wedge} E)^*$, $f \llcorner x \in (\overset{r-s}{\wedge} E)^*$ será o funcional linear sobre $\overset{r-s}{\wedge} E$ definido pela condição:

$$(f \llcorner x) \cdot y = f(x \wedge y), \qquad \text{para todo} \qquad y \in \overset{r-s}{\wedge} E.$$

Segue-se da linearidade de f e da bilinearidade do produto $x \wedge y$ que $f \llcorner x$, conforme definido acima, é de fato um funcional linear sobre $\overset{r-s}{\wedge} E$. Além disso, pelas mesmas razões, $f \llcorner x$ é uma função bilinear do par (f, x). Foi, portanto, definida uma aplicação bilinear:

$$\llcorner : \overset{r}{\wedge} E^* \times \overset{s}{\wedge} E \to \overset{r-s}{\wedge} E^*.$$

Na operação $f \llcorner x$, estamos usando o s-vetor x para reduzir de s unidades o grau da forma exterior f. Quando $x \in E$ é um simples vetor, $f \llcorner x$ é uma forma de grau $r-1$, que na literatura clássica era chamada a "derivada de f na direção de x" e indicada pela notação $\frac{\partial f}{\partial x}$. Mais comum era fixar uma base ordenada $(e_1, \ldots, e_m)$ em E e então escrever $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ (em vez de $\frac{\partial f}{\partial e_i}$) para indicar o produto interior $f \llcorner e_i$, então chamado a "derivada parcial" da forma f em relação a i-ésima variável. A "derivada sucessiva de ordem s", $((f \llcorner e_{i_1}) \llcorner e_{i_2} \ldots) \llcorner e_{i_s}$ era

indicada por $\frac{\partial^s}{\partial x^{i_s} \ldots \partial x^{i_2} \partial x^{i_1}} f$. Trata-se, como veremos agora, da $(r-s)$-forma $f \llcorner (e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s})$. Com efeito, vale a seguinte

Proposição 1. *Seja* $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$, $x \in \overset{s}{\wedge} E$ *e* $y \in \overset{t}{\wedge} E$, *com* $s + t \leq r$. *Então* $(f \llcorner x) \llcorner y = f \llcorner (x \wedge y)$.

Demonstração: Para todo $z \in \overset{r-s-t}{\wedge} E$, temos:

$$\begin{aligned} [(f \llcorner x) \llcorner y] \cdot z &= (f \llcorner x) \cdot (y \wedge z) = f(x \wedge (y \wedge z)) \\ &= f((x \wedge y) \wedge z) = [f \llcorner (x \wedge y)] \cdot z. \end{aligned}$$

□

Corolário. $(f \llcorner x) \llcorner y = (-1)^{st} (f \llcorner y) \llcorner x$, *onde* $s =$*grau de* x *e* $t =$*grau de* y.

O corolário acima diz que a ordem das "derivações" é relevante. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}.$$

Note-se que, para $r = s$, tem-se $f \llcorner x = f(x) \in \mathbb{R}$. Também quando $s = 0$, vale $f \llcorner \alpha = \alpha \cdot f$ para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Encontra-se freqüentemente a notação $i(x)$ para representar a multiplicação interior de uma r-forma pelo s-vetor fixado $x \in \overset{s}{\wedge} E$. Trata-se da transformação linear

$$i(x) \colon \overset{r}{\wedge} E^* \to \overset{r-s}{\wedge} E^*, \quad (r \geq s)$$

definida por $i(x) \cdot f = f \llcorner x$. Podemos interpretar $i(x)$ como a adjunta da transformação linear $e(x) \colon \overset{r-s}{\wedge} E \to \overset{r}{\wedge} E$, que consiste na multiplicação exterior à esquerda por x, isto é, $e(x) \cdot y = x \wedge y$ para todo $y \in \overset{r-s}{\wedge} E$.

Com efeito, $e(x)^* : \overset{r}{\wedge} E^* \to \overset{r-s}{\wedge} E^*$ é, por definição, dada por $[e(x)^* f] = f(e(x) \cdot y) = f(x \wedge y)$, donde $e(x)^* f = f \llcorner x$, para toda $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$.

Por conseguinte, $i(x) = e(x)^*$.

Observação: Quando $r \leq s$, é possível ainda obter o produto interior de um s-vetor $x \in \overset{s}{\wedge} E$ por uma r-forma $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$, dando como resultado um $(s-r)$-vetor $x \llcorner f \in \overset{s-r}{\wedge} E$. Para isto não é necessário uma nova definição. Basta considerar o espaço vetorial $F = E^*$, portanto $F^* = E$. Então

$x \in \overset{s}{\wedge} F^*$ e $f \in \overset{r}{\wedge} F$. A definição anterior, aplicada neste caso, nos dá um $(s-r)$-vetor $x \llcorner f \in \overset{s-r}{\wedge} E$, caracterizado pela relação $g(x \llcorner f) = (f \wedge g) \cdot x$ para toda $(s-r)$-forma $g \in \overset{s-r}{\wedge} E^*$. O leitor encontrará também na literatura um "produto interior à esquerda" $f \lrcorner x$, definido para $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$, $x \in \overset{s}{\wedge} E$, $r \leq s$. Trata-se simplesmente de $f \lrcorner x = (-1)^{r(s-r)} x \llcorner f$, onde $x \llcorner f$ é o que acabamos de definir. Como se vê, no caso de espaços vetoriais de dimensão finita (única que consideramos) não há necessidade de introduzir outro produto interior além do que estamos estudando.

Para melhor conhecer a atuação do produto interior, é conveniente examinar seus resultados nos elementos básicos.

Sejam pois $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma base ordenada de E e $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^m)$ sua base dual em E^*. Elas determinam nos espaços $\overset{r}{\wedge} E^*$ e $\overset{s}{\wedge} E$ as bases constituidas respectivamente pelos produtos exteriores $e^J = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_r}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ e $e_K = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}$, $K = \{k_1 < \cdots < k_s\} \subset I_m$. Quando $r = s$, estas bases são duais uma da outra.

A fim de determinar o produto interior $e^J \llcorner e_K$ de dois elementos básicos $e^J \in \overset{r}{\wedge} E^*$ e $e_K \in \overset{s}{\wedge} E$, introduzamos uma notação. Dados os subconjuntos $K \subset I_m$ e $I \subset I_m$, o símbolo $\varepsilon(K, I)$ representará o número caracterizado pela relação

$$e_K \wedge e_I = \varepsilon(K, I) \cdot e_{K \cup I}.$$

Segue-se que $\varepsilon(K, I) = 0$ quando $K \cap I \neq \emptyset$. Quando porém for $K \cap I = \emptyset$, tem-se $\varepsilon(K, I) = \pm 1$. Mais precisamente, neste caso teremos $\varepsilon(K, I) = (-1)^\mu$, onde μ é o número de pares ordenadas (i, k) com $i \in I$, $k \in K$ e $i < k$. É fácil verificar que se K possui a elementos e I possui b elementos então $\varepsilon(K, I) = (-1)^{ab} \varepsilon(I, K)$. Lembremos ainda que o símbolo $\varepsilon(K)$, introduzido no Capítulo 8 em conexão com a fórmula de Laplace, relaciona-se com o presente através da igualdade $\varepsilon(K) = \varepsilon(K, K')$, $K' = I_m - K$. Finalmente, é óbvio que, considerando-se a base dual, vale ainda $e^K \wedge e^I = \varepsilon(K, I) \cdot e_{K \cup I}$.

Passemos ao cálculo do produto $e^J \llcorner e_K \in \overset{r-s}{\wedge} E^*$.

Para cada elemento básico $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r-s}}$ em $\overset{r-s}{\wedge} E$, onde $I = \{i_1 < \cdots < e_{r-s}\}$, temos:

$$(e^J \llcorner e_K) \cdot e_I = e^J(e_K \wedge e_I) = \varepsilon(K, I) \cdot e^J(e_{K \cup I}).$$

Segue-se que o valor $(e^J \llcorner e_K) \cdot e_I$ do funcional linear $e^J \llcorner e_K$ no vetor e_I é zero quando $K \cup I \neq J$ e é igual a $\varepsilon(K, I)$ quando $K \cup I = J$.

Ora, J, K e I possuem respectivamente r, s e $r - s$ elementos. Logo $K \cup I = J$ se, e somente se, $K \subset J$ e $I = J - K$.

Consequentemente, podemos escrever:

$$e^J \llcorner e_K = \begin{cases} 0, & \text{se } K \not\subset J \\ \varepsilon(K, J-K) \cdot e^{J-K}, & \text{se } K \subset J. \end{cases}$$

Vejamos o que nos dizem estas relações.

Se $K \not\subset J$, então $e^J \llcorner e_K = 0$. Se, porém, $K \subset J$, movemos no produto $e^J = e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_r}$ os fatores cujos índices pertencem a K todos para a frente dos demais fatores, mantendo entre os e^k a ordem crescente dos índices. Isto equivale a escrever $e^J = \varepsilon(K, J-K)e^K \wedge e^{J-K}$. Basta então lembrar a relação (de cancelamento):

$$(e^K \wedge e^{J-K}) \llcorner e_K = e^{J-K}.$$

A relação mais geral $e^J \llcorner e_K = \varepsilon(K, J-K) \cdot e^{J-K}$ resulta daí, por linearidade.

Em particular, se $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ então:

$$\begin{aligned} &(e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_r}) \llcorner e_{j_i} \\ &\quad = (-1)^{i-1} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{i-1}} \wedge e^{j_{i+1}} \wedge \cdots \wedge e^{j_r}. \end{aligned}$$

As fórmulas acima acham-se incluidas na expressão geral do produto interior de uma r-forma decomponível por um s-vetor decomponível, que deduziremos agora.

Proposição 2. *Dados os funcionais lineares $f^1, \ldots, f^r \in E^*$ e os vetores $v_1, \ldots, v_s \in E$, onde $r \geq s$, tem-se*

$$(f^1 \wedge \cdots \wedge f^r) \llcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_s) = \sum_J \varepsilon(J, J') f^J(v_1 \wedge \cdots \wedge v_s) \cdot f^{J'},$$

onde $J = \{j_1 < \cdots < j_s\} \subset I_r$ percorre todos os subconjuntos com s elementos, $J' = I_r - J$ e $f^J = f^{j_1} \wedge \cdots \wedge f^{j_s}$.

Demonstração: Para todo $(r-s)$-vetor decomponível $u_1 \wedge \cdots \wedge u_{r-s}$ temos, por definição

$$\begin{aligned} &[(f^1 \wedge \cdots \wedge f^r) \llcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_s)](u_1 \wedge \cdots \wedge u_{r-s}) \\ &\quad = (f^1 \wedge \cdots \wedge f^r)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_s \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_{r-s}) \\ &\quad = \det[f^i(w_j)], \end{aligned}$$

onde $w_j = v_j$ se $1 \leq j \leq s$ e $w_j = u_{j-s}$ quando $s < j \leq r$. Desenvolvendo o determinante acima segundo a fórmula de Laplace relativa ao conjunto $K = \{1, 2 \ldots, s\}$ das primeiras s colunas da matriz $(f^i(w_j))$, obtemos:

$$\begin{aligned} \det[f^i(w_j)] &= \sum_J \varepsilon(J, J') \cdot f^J(v_1 \wedge \cdots \wedge v_s) \cdot f^{J'}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_{r-s}) \\ &= [\sum_J \varepsilon(J, J') \cdot f^J(v_1 \wedge \cdots \wedge v_s) \cdot f^{J'}](u_1 \wedge \cdots \wedge u_{r-s}). \end{aligned}$$

Assim, o primeiro e o segundo membro da igualdade que estamos querendo estabelecer são funcionais lineares sobre o espaço $\overset{r-s}{\wedge} E$ que assumem o mesmo valor em todos os $(r-s)$-vetores decomponíveis $u_1 \wedge \cdots \wedge u_{r-s}$. Logo esses funcionais coincidem. $\square$

Usaremos agora o produto interior para definir um isomorfismo entre r-vetores e $(m-r)$-formas num espaço vetorial m-dimensional E. Ele generaliza o isomorfismo de dualidade que foi estudado no fim do Capítulo 10, no caso em que o espaço vetorial E era orientado e munido de um produto interno.

O isomorfismo que definiremos dependerá da escolha de uma base em $\overset{m}{\wedge} E^*$ (o que significa mais do que tomar uma orientação em E).

Fixemos então uma base $e^* = e^1 \wedge \cdots \wedge e^m$ em $\overset{m}{\wedge} E^*$, cuja base dual em $\overset{m}{\wedge} E$ é $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$. Como de costume, consideraremos nos espaços $\overset{r}{\wedge} E$ e $\overset{m-r}{\wedge} E^*$ as bases correspondentes, formadas pelos produtos

$$e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}, \quad e^K = e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{k_{r-s}}.$$

Para cada $r \in I_m$, seja

$$\varphi = \varphi_r \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E^*$$

a transformação linear definida por

$$\varphi(x) = e^* \llcorner x,$$

para todo $x \in \overset{r}{\wedge} E$. São as seguintes as propriedades de φ:

Primeira: φ é um isomorfismo.

Com efeito, para cada $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ e $J' = I_m - J$, temos $\varphi(e_J) = \varepsilon(J, J') \cdot e^{J'}$. Assim, φ transforma uma base de $\overset{r}{\wedge} E$ numa base de $\overset{m-r}{\wedge} E^*$ e portanto é um isomorfismo.

Segunda: Seja $\overline{\mathcal{E}} = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m)$ uma nova base ordenada de E, cuja base dual é $\overline{\mathcal{E}}^* = (\overline{e}^1, \ldots, \overline{e}^m)$. Comparando com a base anterior, temos $\overline{e}_j = \sum\limits_i \alpha_j^i e_i$ e, pondo $\overline{e} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$, $\overline{e}^* = \overline{e}^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e}^m$, vem $\overline{e} = \delta \cdot e$, $\overline{e}^* = \frac{1}{\delta} \cdot e^*$, onde $\delta = \det(\alpha_j^i)$. Se considerarmos o isomorfismo

$$\overline{\varphi} \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E^*,$$

definido através da nova base (isto é, $\overline{\varphi}(x) = \overline{e}^* \llcorner x$), teremos

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{\delta} \cdot \varphi.$$

Assim, uma mudança de base faz apenas com que φ fique multiplicado por um fator escalar.

Terceira: φ transforma r-vetores decomponíveis em $(m-r)$-formas decomponíveis.

Com efeito, seja $x \in \overset{r}{\wedge} E$ decomponível. Se for $x = 0$ então $\varphi(x) = 0$ é obviamente decomponível. Se for $x \neq 0$ então $x = \overline{e}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{e}_r$, onde $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r \in E$ são linearmente independentes e portanto fazem parte de uma base ordenada $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r, \overline{e}_{r+1}, \ldots, \overline{e}_m)$ de E. Usando o isomorfismo $\overline{\varphi} \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E^*$ definido através desta base, obtemos $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(\overline{e}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{e}_r) = \overline{e}^{r+1} \wedge \cdots \wedge \overline{e}^m$. Pela propriedade anterior, temos

$$\varphi(x) = \delta \cdot \overline{\varphi}(x) = \delta \overline{e}^{r+1} \wedge \cdots \wedge \overline{e}^m,$$

logo $\varphi(x)$ é decomponível.

Como todo 1-vetor e toda 1-forma são decomponíveis, a consideração dos isomorfismos $\varphi_1 \colon E \to \overset{m-1}{\wedge} E^*$ e $\varphi_{m-1} \colon \overset{m-1}{\wedge} E \to E^*$ mostra que se $\dim E = m$ então os elementos de $\overset{m-1}{\wedge} E^*$ e de $\overset{m-1}{\wedge} E$ são todos decomponíveis.

Quarta: Se $(u_1, \ldots, u_r)$ é base de um subespaço $S \subset E$ então $\varphi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = f^1 \wedge \cdots \wedge f^{m-r}$, onde $(f^1, \ldots, f^{m-r})$ é base do anulador $S^0 \subset E^*$.

Recordemos que o *anulador* de um subespaço $S \subset E$ é o subespaço $S^0 \subset E^*$ formado pelos funcionais lineares $f \in E^*$ tais que $f(v) = 0$ para todo $v \in S$. Quando $\dim S = r$ e $\dim E = m$, tem-se $\dim(S^0) = m - r$. Tem-se $(S^0)^0 = S$ (quando se identifica $(E^*)^*$ com E).

Dizer que $(f^1, \ldots, f^{m-r})$ é uma base do anulador S^0 equivale a dizer que $S = \{x \in E;\ f^1(x) = \cdots = f^{m-r}(x) = 0\}$, ou seja, que o subespaço $S \subset E$ é definido "implicitamente" pelas equações $f^1(x) = 0, \ldots, f^{m-r}(x) = 0$. Por outro lado, dizer que $(u_1, \ldots, u_r)$ é uma base de S significa dizer que o r-vetor $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ "representa" o subespaço S no sentido da correspondência entre subespaços de dimensão r e r-vetores decomponíveis. (Vide Proposições 3 e 4, Capítulo 8.) Assim, o significado desta quarta propriedade é que φ_r estabelece uma correspondência (dualidade) entre os subespaços r-dimensionais de E e os sistemas de $m - r$ equações lineares que definem implicitamente tais subespaços.

Passemos à demonstração da quarta propriedade.

Suponhamos primeiro que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ (parte da base usada para definir φ). Então $e_1, \ldots, e_r$ formam uma base de S. Temos $\varphi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = \varphi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) = e^{r+1} \wedge \cdots \wedge e^m$ onde, evidentemente, $e^{r+1}, \ldots, e^m$ constituem uma base do anulador do subespaço gerado por $e_1, \ldots, e_r$, isto é, de S. Logo a propriedade é válida neste caso. No caso geral, os vetores $u_1, \ldots, u_r$ são parte de uma base $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m)$. Como acabamos de ver, o isomorfismo $\overline{\varphi}$ correspondente é tal que $\overline{\varphi}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = f^1 \wedge \cdots \wedge f^{m-r}$ onde $(f^1, \ldots, f^{m-r})$ é uma base de S^0. Mas $\varphi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = \frac{1}{\delta} f^1 \wedge \cdots \wedge f^{m-r}$ e $(\frac{1}{\delta} f^1, f^2, \ldots, f^{m-r})$ ainda é, obviamente, uma base de S^0.

Quinta: Usando a mesma base com a qual definimos o isomorfismo $\varphi_r \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E^*$, e considerando $E = (E^*)^*$, fica definido o isomorfismo $\varphi_{m-r} \colon \overset{m-r}{\wedge} E^* \to \overset{r}{\wedge} E$. Tem-se $\varphi_{m-r} = (-1)^{r(m-r)} (\varphi_r)^{-1}$.

Com efeito, para cada elemento básico $e_J \in \overset{r}{\wedge} E$, temos

$$\varphi_r(e_J) = \varepsilon(J, J') e^{J'} \quad \text{e} \quad \varphi_{m-r}(e^{J'}) = \varepsilon(J', J) e_J.$$

Logo

$$\varphi_{m-r}[\varphi_r(e_J)] = \varepsilon(J, J') \cdot \varepsilon(J', J) e_J = (-1)^{r(m-r)} e_J.$$

Sexta: Supondo E orientado, munido de um produto interno e que a base $(e_1, \ldots, e_m)$, usada para definir o isomorfismo $\varphi \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E^*$ é ortonormal positiva, temos

$$D = \xi \circ \varphi \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E,$$

onde E é o isomorfismo de dualidade (vide fim do Capítulo 10) e $\xi\colon \overset{m-r}{\wedge} E^* \to \overset{m-r}{\wedge} E$ é o isomorfismo induzido pelo produto interno de E.

Com efeito, a base formada pelas $(m-r)$-formas $e^{J'}$ em $\overset{m-r}{\wedge} E^*$ é ortonormal e portanto $\xi(e^{J'}) = e_{J'}$. Assim sendo, para cada $J \subset I_m$ com r elementos, temos

$$(\xi \circ \varphi) \cdot e_J = \varepsilon(J, J') \cdot \xi(e^{J'}) = \varepsilon(J, J') \cdot e_{J'} = D \cdot e_J.$$

Portanto $\xi \circ \varphi$ coincide com D numa base e daí $\xi \circ \varphi = D$.

Observação: (Para os leitores que têm alguma familiaridade com Topologia Algébrica.) Existe uma analogia que procede da seguinte maneira: $\overset{r}{\wedge} E$ $\Leftrightarrow$ homologia r-dimensional; $\overset{r}{\wedge} E^*$ $\Leftrightarrow$ cohomologia de dimensão r; $f \wedge g$ $\Leftrightarrow$ "cup-product" em cohomologia; $f \llcorner x$ $\Leftrightarrow$ "cap-product"; $e^* = e^1 \wedge \cdots \wedge e^m$ $\Leftrightarrow$ cociclo fundamental de uma variedade; $\varphi_r\colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E^*$ $\Leftrightarrow$ dualidade de Poincaré. Na realidade, essa correspondência é mais do que uma mera analogia. As operações de que estamos tratando aqui, quando efetuadas com formas diferenciais numa variedade, e associadas ao operador fundamental de diferenciação exterior, conduzem à importante teoria da cohomologia de De Rham.

Em alguns exercícios dos capítulos anteriores foi mencionado que a todo r-vetor $z \in \overset{r}{\wedge} E$ corresponde um subespaço vetorial $M_z \subset E$, que chamaremos agora o *subespaço associado* a z, o qual é caracterizado pelas seguintes propriedades:

a) $z \in \overset{r}{\wedge} M_z$;

b) Se $S \subset E$ é um subespaço vetorial tal que $z \in \overset{r}{\wedge} S$ então $M_z \subset S$.

Em resumo, M_z é o menor subespaço vetorial de E tal que $z \in \overset{r}{\wedge} M_z$.

Quando $z = 0$, evidentemente, $M_z = \{0\}$. O caso interessante é o de $z \neq 0$. Então a condição $0 \neq z \in \overset{r}{\wedge} M_z$ mostra que $\dim M_z \geq r$. Tem-se $\dim M_z = r$ se, e somente se, z é decomponível. Com efeito, se $z \in \overset{r}{\wedge} M_z$ com $\dim M_z = r$ então todos os elementos de $\overset{r}{\wedge} M_z$ são decomponíveis e, em particular, z o é. Reciprocamente, se $z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \neq 0$ é decomponível então o subespaço S gerado por $v_1, \ldots, v_r$ é tal que $z \in \overset{r}{\wedge} S$, logo $M_z \subset S$ e portanto $\dim M_z = r$.

Para nenhum $z \in \overset{r}{\wedge} E$ pode-se ter $\dim M_z = r+1$. Com efeito, então $z \in \overset{r}{\wedge} M_z$ seria um r-vetor sobre um espaço de dimensão $r+1$. Mas, neste

caso, todo r-vetor é decomponível, o que implicaria, como acabamos de ver, $\dim M_z = r$, uma contradição.

A dimensão de M_z chama-se o *posto* do r-vetor z. Como vimos, se $z \neq 0$ então o posto de z é r se, e somente se, z for decomponível. No caso de r indecomponível, o posto de z é $\geq r+2$.

As considerações acima se baseiam na existência do subespaço vetorial M_z, que ficou estabelecida em exercícios anteriores. A proposição seguinte dá uma caracterização de M_z em termos do produto interior e prova, em particular, sua existência, independentemente dos exercícios.

Por conveniência, consideraremos o caso 'covariante", isto é, tomaremos uma r-forma $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$. É claro que o caso "contravariante", ou seja, de $z \in \overset{r}{\wedge} E$, segue-se daí, considerando E como o dual de E^*.

Proposição 3. *Seja* $0 \neq f \in \overset{r}{\wedge} E^*$. *O subespaço vetorial* $M_f \subset E^*$, *definido por:*

$$M_f = \{f \llcorner x;\ x \in \overset{r-1}{\wedge} E\},$$

goza das propriedades seguintes:

a) $f \in \overset{r}{\wedge} M_f$;

b) *Se* $S \subset E^*$ *é tal que* $f \in \overset{r}{\wedge} S$, *então* $M_f \subset S$.

Demonstração: De acordo com a definição acima, $M_f \subset E^*$ é evidentemente um subespaço vetorial, no qual fixamos uma base $(e^1, \ldots, e^s)$ e a estendemos a uma base $(e^1, \ldots, e^s, \ldots, e^m)$ de E^*. Em termos da base correspondente de $\overset{r}{\wedge} E^*$, a expressão de f é $f = \sum_J \xi_J e^J$, onde $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ percorre todos os subconjuntos com r elementos e $e^J = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_r}$. Mostremos que, nesta expressão, tem-se $\xi_J = 0$ sempre que o último elemento, j_r, do conjunto J for maior do que s. Isto provará que $f \in \overset{r}{\wedge} M_f$. Seja então $J_0 \subset I_m$ um certo subconjunto com r elementos cujo último elemento é $j_r > s$. Tomemos $K = J - \{j_r\}$. Então $e_K \in \overset{r-1}{\wedge} E$ e temos:

$$f \llcorner e_K = \sum_{J \supset K} \pm \xi_J e^j$$

onde a soma se estende aos J com r elementos que contém K e, para cada um deles, $\{j\} = J - K$. Como $f \llcorner e_K \in M_f$, devemos ter $\xi_J = 0$ sempre que $j > s$. Em particular, tem-se $\xi_{J_0} = 0$, o que demonstra a afirmação a).

Para demonstrar b), seja $S \subset E^*$ um subespaço tal que $f \in \overset{r}{\wedge} S$. Tomemos uma base $(e^1, \ldots, e^s)$ em S e a estendamos a uma base $(e^1, \ldots, e^s, \ldots, e^m)$ de E^*. A expressão de f na base correspondente de $\overset{r}{\wedge} E^*$ é $f = \sum_J \xi_J e^J$, a soma estendendo-se a todos os subconjuntos $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset I_m$ tais que $j_r \leq s$. Então, para todo subconjunto $K \subset I_m$, com $r-1$ elementos, temos

$$f \llcorner e_K = \sum_{J \supset K} \pm \xi_J e^j,$$

a soma se estendendo aos subconjuntos J que contém K, sendo $\{j\} = J - K$. Em particular, para cada um desses K, vemos que $f \llcorner e_K$ pertence a S. Como os e_K formam uma base de $\overset{r-1}{\wedge} E^*$, concluimos que todas as formas $f \llcorner x$, $x \in \overset{r-1}{\wedge} E^*$, pertencem a S. Em outras palavras, $M_f \subset S$, o que prova b). □

Para registrar apenas, enunciemos como corolário a versão da Proposição 3 referente a r-vetores.

Corolário. *Para cada r-vetor $z \in \overset{r}{\wedge} E$, o subespaço vetorial $M_z = \{z \llcorner f;\ f \in \overset{r-1}{\wedge} E^*\} \subset E$ é o menor subespaço de E tal que $z \in \overset{r}{\wedge} M_z$.*

Proposição 4. *Para toda $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$, temos*:

$$(M_f)^0 = \{v \in E;\ f \llcorner v = 0\}.$$

Demonstração: Recorde-se que, dado um subespaço $S \subset E^*$, seu anulador $S^0 \subset E$ é definido por $S^0 = \{v \in E;\ \varphi(v) = 0 \text{ para todo } \varphi \in S\}$. A Proposição 4 resulta então da Proposição 3, já que as afirmações abaixo são equivalentes umas às outras:

$$\begin{array}{ll}
(1) & v \in (M_f)^0 \\
(2) & (f \llcorner x) \cdot v = 0 \\
(3) & f(x \wedge v) = 0 \\
(4) & f(v \wedge x) = 0 \\
(5) & (f \llcorner v) \cdot x = 0 \\
(6) & f \llcorner v = 0.
\end{array}
\quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{ para todo } x \in \overset{r-1}{\wedge} E;$$

□

Na versão dual: para todo $z \in \overset{r}{\wedge} E$, o anulador de M_z é dado por $(M_z)^0 = \{f \in E^*;\ z \,\llcorner\, f = 0\}$.

Exercícios

1. Seja $(e^1, \ldots, e^m)$ a base dual de $(e_1, \ldots, e_m)$. Dadas as formas $f = \sum_{i=1}^{m} a_i e^i$ e $g = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij} e^i \wedge e^j$ (com $b_{ij} = -b_{ji}$), prove que $f \,\llcorner\, e_k = a_k$ e $g \,\llcorner\, e_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} e^j$.

2. Para toda $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$ e todo par de bases duais $(e_1, \ldots, e_m)$ e $(e^1, \ldots, e^m)$, prove que se tem $f = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} e^i \wedge (f \,\llcorner\, e_i)$.

3. Dada $T \colon E \to F$ linear, indiquemos com $T_\wedge \colon \wedge E \to \wedge F$ e $T^\wedge \colon \wedge F^* \to \wedge E^*$ os homomorfismos induzidos por T nessas álgebras de Grassmann. Prove que, para toda $f \in \overset{r}{\wedge} F^*$ e todo $x \in \overset{s}{\wedge} E$, com $r \geq s$, tem-se $(T^\wedge f) \,\llcorner\, x = T^\wedge (f \,\llcorner\, T_\wedge x)$.

4. A fim de que $f \in \overset{r}{\wedge} E^*$ seja decomponível, é necessário e suficiente que $f \wedge (f \,\llcorner\, x) = 0$ para todo $x \in \overset{r-1}{\wedge} E$.

5. Seja $\varphi \colon \overset{r}{\wedge} E \to \overset{m-r}{\wedge} E^*$ o isomorfismo determinado por uma base $e^* = e^1 \wedge \cdots \wedge e^m$ de $\overset{m}{\wedge} E^*$. Prove que, para todo $z \in \overset{r}{\wedge} E$, tem-se $(M_{\varphi(z)})^0 = S_z$. (Lembramos que $S_z = \{v \in E;\ z \wedge v = 0\}$.)

Bibliografia

[1] E.L. Lima, Cálculo Tensorial (Notas de Matemática, nº 32), Rio de Janeiro, IMPA, 1965.

[2] W.H. Greub, Multilinear Algebra, Springer-Verlag, Berlim, 1967.

[3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitre III, Hermann, Paris, 1970.

[4] H. Whitney, Geometric Integration Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.

[5] S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[6] W. Slebodzinski, Exterior Forms and their Applications, Polish Scientific Publishere, Warszawa, 1970.

O autor:

Elon Lages Lima é Pesquisador Emérito do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Doutor *Honoris Causa* pela Universidade Federal de Alagoas e pela Universidad Nacional de Ingenieria do Peru, Professor *Honoris Causa* da Universidade Federal do Ceará, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Campinas e da Pontifícia Universidade Católica do Peru, além de membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da *TWAS (Academy of Sciences for the Developing World)*.

É autor de vários livros de Topologia, Análise, Álgebra e Matemática Elementar, dois dos quais são ganhadores do Prêmio Jabuti.

A coleção

A coleção Matemática Universitária é uma série de livros escritos por matemáticos competentes e com grande experiência didática, a fim de servirem de textos para cursos em nível de graduação nas universidades brasileiras.

Os livros da coleção contêm exposições objetivas e bem organizadas, acompanhadas de exercícios selecionados.

O livro

A Álgebra Exterior é, do ponto de vista puramente algébrico, o estudo das aplicações multilineares alternadas e suas ramificações. Sob o ponto de vista geométrico, ela trata dos vetores p-dimensionais, que foram originalmente concebidos por H. Grassmann.

A apresentação contida neste livro é elementar, sendo acessível a leitores que tenham familiaridade com os conceitos básicos de Álgebra Linear.

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA